Exercice 102, page 149

1. Le syllogisme fameux, tout homme est mortel, Socrate est un homme, donc est mortel, que nous formalisons par $\forall x(H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(socrate) \Rightarrow M(socrate)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x(H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(socrate)$	
1	2	$H(socrate)$	$\wedge E2$
1	3	$\forall x(H(x) \Rightarrow M(x))$	$\wedge E1$
1	4	$H(socrate) \Rightarrow M(socrate)$	$\forall E$ 3, $socrate$
1	5	$M(socrate)$	$\Rightarrow E$ 2,4
	6	`Donc` $\forall x(H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(socrate) \Rightarrow M(socrate)$	$\Rightarrow I$ 1,5

2. $\forall xP(x) \Rightarrow \exists yP(y)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall xP(x)$	
1	2	$P(y)$	$\forall E$ 1, y
1	3	$\exists yP(y)$	$\exists I$ 2, y
	4	`Donc` $\forall xP(x) \Rightarrow \exists yP(y)$	$\Rightarrow I$ 1,3

3. $\forall xP(x) \Rightarrow \exists xP(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall xP(x)$	
1	2	$P(x)$	$\forall E$ 1, x
1	3	$\exists xP(x)$	$\exists I$ 2, x
	4	`Donc` $\forall xP(x) \Rightarrow \exists xP(x)$	$\Rightarrow I$ 1,4

4. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$. Notez que l'exemple 6.1.2 donne la preuve de la réciproque.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	
1	2	$P(x) \wedge Q(x)$	$\forall E$ 1, x
1	3	$P(x)$	$\wedge E1$ 2
1	4	$Q(x)$	$\wedge E2$ 2
1	5	$\forall xP(x)$	$\forall I$ 3
1	6	$\forall xQ(x)$	$\forall I$ 4
1	7	$\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$	$\wedge I$ 5,6
	8	`Donc` $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$	$\Rightarrow I$ 1,7

5. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\exists x(P(x) \vee Q(x))$	
1,2	2	Supposons $P(x) \vee Q(x)$	
1,2,3	3	Supposons $P(x)$	
1,2,3	4	$\exists x P(x)$	$\exists I$ 3, x
1,2,3	5	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\vee 1$ 4
1,2	6	Donc $P(x) \Rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\Rightarrow I$ 3,5
1,2,7	7	Supposons $Q(x)$	
1,2,7	8	$\exists x Q(x)$	$\exists I$ 7, x
1,2,7	9	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\vee 2$ 8
1,2	10	Donc $Q(x) \Rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\Rightarrow I$ 7,9
1,2	11	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\vee E$ 2,6,10
1	12	Donc $(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\Rightarrow I$ 2,11
1	13	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\exists E$ 1,12
	14	Donc $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\Rightarrow I$ 1,13

6. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x P(x)$	
1	2	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\exists x P(x)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	Supposons $P(x)$	
1,4	5	$P(x) \Rightarrow Q(x)$	$\forall E$ 2, x
1,4	6	$Q(x)$	$\Rightarrow E$ 4,5
1,4	7	$\exists x Q(x)$	$\exists I$ 6, x
1	8	Donc $P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$	$\Rightarrow I$ 4,7
1	9	$\exists x Q(x)$	$\exists E$ 3,8
	10	Donc $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$	$\Rightarrow I$ 1,9

7. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	
1,2	2	Supposons $\exists x P(x)$	
1,2,3	3	Supposons $P(x)$	
1,2,3	4	$P(x) \vee Q(x)$	$\vee I1$ 3
1,2,3	5	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\exists I$ 4, x
1,2	6	Donc $P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\Rightarrow I$ 3,5
1,2	7	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\exists E$ 2,6
1	8	Donc $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\Rightarrow I$ 2,7
1,9	9	Supposons $\exists x Q(x)$	
1,9,10	10	Supposons $Q(x)$	
1,9,10	11	$P(x) \vee Q(x)$	$\vee I2$ 10
1,9,10	12	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\exists I$ 11, x
1,9	13	Donc $Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\Rightarrow I$ 10,12
1,9	14	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\exists E$ 9,13
1	15	Donc $\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\Rightarrow I$ 9,14
1	16	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\vee E$ 1,8,15
	17	Donc $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\Rightarrow I$ 1,16

8. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$	
1	2	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$	$\wedge E2$ 1
1	4	$P(x) \Rightarrow Q(x)$	$\forall E$ 2, x
1	5	$Q(x) \Rightarrow R(x)$	$\forall E$ 3, x
1,6	6	`Supposons` $P(x)$	
1,6	7	$Q(x)$	$\Rightarrow E$ 6,4
1,6	8	$R(x)$	$\Rightarrow E$ 7,5
1	9	`Donc` $P(x) \Rightarrow R(x)$	$\Rightarrow I$ 6 8
1	10	$\forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$	$\forall I$ 9
	11	`Donc` $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$	$\Rightarrow I$ 1,9

9. $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x\ \neg Q(x) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x\ \neg Q(x)$	
1	2	$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\exists x\ \neg Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	`Supposons` $\neg Q(x)$	
1,4	5	$P(x) \Rightarrow Q(x)$	$\forall E$ 2
1,4,6	6	`Supposons` $P(x)$	
1,4,6	7	$Q(x)$	$\Rightarrow E$ 5,6
1,4,6	8	$\bot$	$\Rightarrow E$ 4,7
1,4	9	`Donc` $\neg P(x)$	$\Rightarrow I$ 6,8
1,4	10	$\exists x\ \neg P(x)$	$\exists I$ 9
1	11	`Donc` $\neg Q(x) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$	$\Rightarrow I$ 4,10
1	12	$\exists x\ \neg P(x)$	$\exists E$ 3,11
	13	`Donc` $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x\ \neg Q(x) \Rightarrow \exists x\ \neg P(x)$	$\Rightarrow I$ 1,12

Exercice 103, page 149

Tout d'abord, les contraintes sur les formules sont nécessaires, car si elles ne sont pas respectées, nous ne pouvons pas généraliser, c'est-à-dire, introduire le « $\forall$ ».

1. $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \forall x P(x,y)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x \forall y P(x,y)$	
1	2	$\forall y P(x,y)$	$\forall E$ 1, x
1	3	$P(x,y)$	$\forall E$ 2, y
1	4	$\forall x P(x,y)$	$\forall I$ 3
1	5	$\forall y \forall x P(x,y)$	$\forall I$ 4
	6	`Donc` $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \forall x P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 1,5

2. $\exists x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x \exists y P(x,y)$	
1,2	2	`Supposons` $\exists y P(x,y)$	
1,2,3	3	`Supposons` $P(x,y)$	
1,2,3	4	$\exists x P(x,y)$	$\exists I$ 3, x
1,2,3	5	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\exists I$ 4, y
1,2	6	`Donc` $P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 5,3
1,2	7	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\exists E$ 6,2
1	8	`Donc` $\exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 7,2
1	9	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\exists E$ 8,1
	10	`Donc` $\exists x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 1,9

3. $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x \forall y P(x,y)$	
1,2	2	`Supposons` $\forall y P(x,y)$	
1,2	3	$P(x,y)$	$\forall E$ 2, y
1,2	4	$\exists x P(x,y)$	$\exists I$ 3, x
1,2	5	$\forall y \exists x P(x,y)$	$\forall I$ 4
1	6	`Donc` $\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 5,2
1	7	$\forall y \exists x P(x,y)$	$\exists E$ 6,1
	8	`Donc` $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 1,7

4. $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y)))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y)))$	
1	2	$Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))$	$\forall E$ 1, x
1,3	3	`Supposons` $R(y)$	
1,3,4	4	`Supposons` $Q(x)$	
1,3,4	5	$\forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))$	$\Rightarrow E$ 2,4
1,3,4	6	$R(y) \Rightarrow P(x,y)$	$\forall E$, y
1,3,4	7	$P(x,y)$	$\Rightarrow E$ 6,3
1,3	8	`Donc` $Q(x) \Rightarrow P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 7,4
1,3	9	$\forall x Q(x) \Rightarrow P(x,y))$	$\forall I$ 8
1	10	`Donc` $R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y))$	$\Rightarrow I$ 9,3
1	11	$\forall y(R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y)))$	$\forall I$ 10
	12	`Donc` $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y)))$	$\Rightarrow I$ 1,11

Exercice 104, page 150

Les démonstrations de 2 et 3 sont ERRONÉES.

1. $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	
1	2	$\exists x\, P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x\, Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	Supposons $P(x)$	
1,4	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1,4	6	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 4,5
1,4	7	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists I$ 6, x
1	8	Donc $P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow I$ 4,7
1	9	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists E$ 2,8
	10	Donc $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow I$ 1,9

2. $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	
1	2	$\exists x\, P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x\, Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	Supposons $P(x)$	
1,4	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1,4	6	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 4,5
1	7	Donc $P(x) \Rightarrow P(x) \wedge Q(x)$	$\Rightarrow I$ 4,6
1	8	$P(x) \wedge Q(x)$	$\exists E$ 2,7 ERREUR
1	9	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists I$ 8, x
	10	Donc $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow I$ 1,9

Il y a une erreur à la ligne 8 car x est libre dans $P(x) \wedge Q(x)$.

3. $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	
1	2	$\exists x\, P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x\, Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	Supposons $P(x)$	
1	5	Donc $P(x) \Rightarrow P(x)$	$\Rightarrow I$ 4,4
1	6	$P(x)$	$\exists E$ 2,5 ERREUR
1	7	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1	8	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 6,7
1	9	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists I$ 8, x
	10	Donc $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow I$ 1,9

Il y a une erreur à la ligne 6, car x est libre dans $P(x)$.