Déduction Naturelle: quantificateurs, copie et égalité

Benjamin Wack

Université Grenoble Alpes

Avril 2022

Motivation

Cas propositionnel

Il y a des algorithmes pour décider si une formule est valide ou non.

Cas du premier ordre

Il n'y a aucun algorithme pour décider si une formule est valide ou non.

En admettant l'équivalence entre prouvable et valide, il n'y a pas d'algorithme qui, étant donné une formule du 1º ordre, puisse :

- en construire une preuve
- ou nous avertir que cette formule n'a pas de preuve.

Alonzo Church (1903-1995), logicien américain

- Inventeur du lambda-calcul (1936)
  $(\lambda x.xy)\ (\lambda z.z) \ \rightarrow_{\beta} \ (\lambda z.z)y$
  - proposition de modèle de calcul universel
  - à la base des langages fonctionnels (ML, Lisp...)
  - permet de représenter des programmes aussi bien que des démonstrations
  - une des premières notions de typage
- Preuve que la logique du premier ordre est indécidable algorithmiquement (remise en cause du programme de Hilbert)
- Résultats redémontrés indépendemment par Turing (1937)
- Thèse de Church-Turing : le λ-calcul ou la machine de Turing expriment exactement ce qu'est un calcul mécanique

Plan

Plan

Rappel : Règles « propositionnelles »

Table 3.1

Introduction	Élimination
$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \dots\\ B\end{matrix}}{A\Rightarrow B}\ \Rightarrow I$	$\dfrac{A \quad A\Rightarrow B}{B}\ \Rightarrow E$
$\dfrac{A \quad B}{A\wedge B}\ \wedge I$	$\dfrac{A\wedge B}{A}\ \wedge E1$ $\dfrac{A\wedge B}{B}\ \wedge E2$
$\dfrac{A}{A\vee B}\ \vee I1$ $\dfrac{A}{B\vee A}\ \vee I2$	$\dfrac{A\vee B \quad A\Rightarrow C \quad B\Rightarrow C}{C}\ \vee E$
Règle du faux	
$\dfrac{\bot}{A}\ Efq$	
Réduction à l'absurde	
$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ RAA$	

Extension de la déduction naturelle propositionnelle

- Les définitions de **brouillon de preuve, environnement, contexte, formule utilisable** restent inchangées !
- Une seule règle pour enlever des hypothèses : $\Rightarrow$ I.

Règles en plus par rapport à la DN « propositionnelle ».

- les quantificateurs
- la copie
- l'égalité

Cohérence et complétude

- **Cohérence :** $\Gamma \vdash A$ implique $\Gamma \models A$.

  Démontrée au prochain cours.
  L'essentiel est de montrer que les nouvelles règles sont correctes.

- **Complétude :** $\Gamma \models A$ implique $\Gamma \vdash A$.
  Admise sans preuve.

Plan

Introduction

Une règle d'élimination et une règle d'introduction pour chaque quantificateur.

- Comment utiliser ces règles sur des exemples.
- Ainsi que les erreurs occasionnées par le non respect des conditions d'emploi des règles.

Rappel

Définition 4.3.34

Soit x une variable, t un terme et A une formule.

1. $A < x := t >$ est la formule obtenue en remplaçant dans la formule A toute occurrence libre de x par le terme t.
2. Le terme t est libre pour x dans A si les variables de t ne sont pas liées dans les occurrences libres de x.

Exemple

$$A = \forall y P(x, y)$$

- z est-il libre pour x dans A ? oui
- $g(y)$ est-il libre pour x dans A ? non
- x est-il libre pour y dans A ? oui

Règles des quantificateurs : $\forall$E

A et B sont des formules, x est une variable, t est un terme

Elimination $\forall$

$$\frac{\forall x A}{A < x := t >}\forall E$$

t doit être libre pour x dans A.

Exemple 6.1.1

Usage incorrect de la règle $\forall$E : où est l'erreur ?

1	1	supposons $\forall x \exists y P(x, y)$	
1	2	$\exists y P(y, y)$	$\forall E$ 1, y ERREUR
	3	donc $\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists y P(y, y)$	

À la ligne 2, on n'a pas respecté les conditions d'applications de $\forall$E car le terme y n'est pas libre pour x dans la formule $\exists y P(x, y)$.

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $P_I =$

$\boxed{\{(0, 1), (1, 0)\}}$

Cette interprétation rend fausse la « conclusion ».

Règles des quantificateurs : $\forall$ I

A et B sont des formules, x est une variable.

Introduction $\forall$

$$\frac{A}{\forall x A}\forall I$$

x ne doit être libre

- ni dans l'**environnement** de la preuve,
- ni dans le **contexte** de la prémisse de la règle.

Exemple 6.1.2 $\forall y P(y) \wedge \forall y Q(y) \Rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$

1	1	supposons $\forall y P(y) \wedge \forall y Q(y)$	
1	2	$\forall y P(y)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall y Q(y)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$P(x)$	$\forall E$ 2, x
1	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1	6	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 4, 5
1	7	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	$\forall I$ 6
	8	donc $\forall y P(y) \wedge \forall y Q(y) \Rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow$I 1, 7

Remarque : Dans l'usage de la règle ∀E aux lignes 4 et 5, on précise que y est remplacé par x.

Exemple 6.1.3

Usage incorrect de la règle $\forall$I

1	1	supposons $P(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\forall I$ 1 ERREUR
	3	donc $P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$	$\Rightarrow$I 1, 2

À la ligne 2, x est libre dans le contexte $P(x)$, ce qui interdit de généraliser sur x.

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $P_I = \{0\}$.
Soit e un état où $x = 0$.
L'assignation (I, e) rend fausse la « conclusion ».

Règles des quantificateurs : ∃E

A et B sont des formules, x est une variable.

Elimination ∃

$$\frac{\exists x A \qquad (A \Rightarrow B)}{B}\exists E$$

x ne doit être libre

- ni dans l'environnement,
- ni dans B,
- ni dans le contexte de $A \Rightarrow B$.

Exemple 6.1.4

Usage incorrect de la règle ∃E

1	1	Supposons $\exists x P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))$	
1	2	$\exists x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$\forall y Q(y)$	$\exists E$ 2, 3 ERREUR
	5	Donc $\exists x P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)) \Rightarrow \forall y Q(y)$	$\Rightarrow I$ 1,4

Le contexte de la prémisse $P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)$ ne doit pas dépendre de x.

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $P_I = Q_I = \{0\}$.
Soit l'état e où $x = 1$.
L'assignation (I, e) rend fausse cette « conclusion ».

Exemple 6.1.5

Usage incorrect de la règle $\exists$E

1	1	supposons $\exists x P(x)$	
1, 2	2	supposons $P(x)$	
1	3	donc $P(x) \Rightarrow P(x)$	$\Rightarrow I$ 2, 2
1	4	$P(x)$	$\exists E$ 1, 3 ERREUR
1	5	$\forall x P(x)$	$\forall I$ 4
	6	donc $\exists x P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$	

La conclusion de la règle $\exists E$ ne doit pas dépendre de x.

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $P_I = \{0\}$.
I rend fausse la « conclusion ».

Règles des quantificateurs : ∃I

A et B sont des formules, x est une variable, t est un terme

Introduction ∃

$$\frac{A < x := t >}{\exists x A}\exists I$$

t doit être libre pour x dans A.

Exemple 6.1.6 $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de De Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	Raa 6
1, 2	8	$\forall xA$	$\forall I$ 7
1, 2	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 8
1	10	Donc $\neg\neg\exists x\neg A$	$\Rightarrow$ I 2, 9
1	11	$\exists x\neg A$	Raa 10
	12	Donc $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$	$\Rightarrow$ I 1, 11

- À la ligne 4 : on utilise $\neg A = \neg A < x := x >$
  et une variable x est toujours libre pour elle-même dans A.

Récapitulatif des règles des quantificateurs : Tableau 6.1

$\dfrac{A}{\forall x A}$	$\forall I$	x ne doit être libre ▶ ni dans l'environnement de la preuve, ▶ ni dans le contexte de la prémisse
$\dfrac{\forall x A}{A{<}x{:=}t{>}}$	$\forall E$	t doit être libre pour x dans A
$\dfrac{A{<}x{:=}t{>}}{\exists x A}$	$\exists I$	t doit être libre pour x dans A
$\dfrac{\exists x A \qquad (A \Rightarrow B)}{B}$	$\exists E$	x ne doit être libre ▶ ni dans l'environnement ▶ ni dans B, ▶ ni dans le contexte de $A \Rightarrow B$

Plan

Définition

La règle de copie consiste à déduire d'une formule, une autre formule égale au changement près des variables liées.

$$\frac{A'}{A} \text{ copie}$$

Rappels : changement de variables liées (1/3)

Deux formules sont α-équivalentes si on peut obtenir l'une à partir de l'autre en remplaçant des sous-formules $Qx\ A$ par $Qy\ A < x := y >$ où Q est un quantificateur et y ne figure pas dans $Qx\ A$.

Exemple 4.4.4

- $\forall x\ p(x,z) =_\alpha \forall y\ p(y,z)$.
- $\forall x\ p(x,z) \neq_\alpha \forall z\ p(z,z)$.

Changement de variables liées (2/3)

Définition 4.4.5

Deux formules sont égales à un changement près de variables liées si on obtient l'une à partir de l'autre par des remplacements de la forme

$$Qx\ A \equiv Qy\ A < x := y > \quad \text{où } y \text{ ne figure pas dans } Qx\ A$$

On dit que les deux formules sont :

- α-équivalentes
- copie l'une de l'autre
- $A =_\alpha B$

Changement de variables liées (3/3)

Théorème 4.4.6

Si deux formules sont égales à un changement près de variables liées alors elles sont équivalentes.

Exemple 4.4.7

Montrons que $\forall x \exists y P(x, y)$ et $\forall y \exists x P(y, x)$ sont équivalentes.

$$\begin{array}{rl} & \forall x \exists y P(x, y) \\ =_\alpha & \forall u \exists y P(u, y) \\ =_\alpha & \forall u \exists x P(u, x) \\ =_\alpha & \forall y \exists x P(y, x) \end{array}$$

Savoir si deux formules sont α-équivalentes

Technique

- Tracer un trait entre chaque quantificateur et les variables qu'il lie.
- Effacer les noms des variables liées.

Si les formules deviennent identiques, alors elles sont α-équivalentes.

Exemple 4.4.8

Les deux formules $\forall x \exists y P(y, x)$ et $\forall y \exists x P(x, y)$ donnent :

$$\forall \quad \exists \quad P(\quad , \quad)$$

Exercice

Calculer la transformation pour

- $A = \forall x \forall y\ R(x, y, y)$
- $B = \forall x \forall y\ R(x, x, y)$

A et B sont-elles α-équivalentes ?

Preuve sans règle de copie

Dans l'environnement $(i)\ \exists x P(x)$:

1	1	supposons $P(x)$	
1	2	$\exists y P(y)$	$\exists$I 1, x
	3	donc $P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$	$\Rightarrow$I 1, 2
	4	$\exists y P(y)$	$\exists$E i, 3

Théorème (admis)

Soient A et A' deux formules fermées copies l'une de l'autre.
Alors il existe une preuve de A dans l'environnement A'.

Plan

Réflexivité et congruence

Deux règles caractérisent l'égalité :

- un terme est égal à lui-même
- si deux termes sont égaux, on peut les remplacer l'un par l'autre.

$\dfrac{}{t{=}t}$	réflexivité	t est un terme
$\dfrac{s{=}t \qquad A{<}x{:=}s{>}}{A{<}x{:=}t{>}}$	congruence	s et t sont deux termes libres pour la variable x dans la formule A

Exemple 6.1.7

Prouvons que $s = t \Rightarrow t = s$ (symétrie)

1	1	supposons $s = t$	
1	2	$s = s$	réflexivité
1	3	$t = s$	congruence 1, 2 $\quad \dfrac{s = t \quad (x = s) < x := s >}{(x = s) < x := t >}$
	3	donc $s = t \Rightarrow t = s$	$\Rightarrow$I 1, 3

Remarque : La variable x ne figure pas dans la preuve,
elle sert à marquer l'endroit où on remplace s par t.

Dans les prochains exemples, on se contente de souligner cet endroit.

Exemple 6.1.8

Prouvons que $s = t \wedge t = u \Rightarrow s = u$ (transitivité)

1	1	supposons $s = t \wedge t = u$	
1	2	$s = \underline{t}$	$\wedge$E1 1
1	3	$t = u$	$\wedge$E2 1
1	4	$s = \underline{u}$	congruence 3, 2
	5	donc $s = t \wedge t = u \Rightarrow s = u$	$\Rightarrow$I 1, 4

Plan

Aujourd'hui

- Complétude de la résolution au premier ordre
- Déduction Naturelle au premier ordre
  - Règles d'introduction et élimination pour les quantificateurs
  - Copie, égalité en déduction naturelle

Prochaine fois

- Tactiques
- Cohérence du système