Transformation d’une formule logique

Benjamin Wack

Université Grenoble Alpes

Janvier 2025

Au dernier cours

- Pourquoi la logique formelle ?
- Logique propositionnelle
- Syntaxe
- Sens des formules

Notre exemple avec une table de vérité

Hypothèses :

- (H1) : Si Pierre est grand, alors Jean n'est pas le fils de Pierre
- (H2) : Si Pierre n'est pas grand, alors Jean est le fils de Pierre
- (H3) : Si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la soeur de Jean

Conclusion (C) : Marie est la soeur de Jean ou Pierre est grand.

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$

p	j	m	$p \Rightarrow \neg j$	$\neg p \Rightarrow j$	$j \Rightarrow m$	$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$	$m \vee p$	$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \Rightarrow C$
0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1

Plan

Conséquence

Définition 1.2.24

A est conséquence de l'ensemble Γ d'hypothèses ($\Gamma \models A$) si tout modèle de Γ est aussi un modèle de A.

Remarque 1.2.26

$\models A$ signifie donc bien que A est valide.
(Toute assignation est modèle de l'ensemble vide.)

Exemple de Conséquence

Exemple 1.2.28

$a \Rightarrow b \, , \, b \Rightarrow c \; \models \; a \Rightarrow c.$

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow c$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Propriété INCONTOURNABLE

Constamment utilisée dans les exercices et examens.

Propriété 1.2.27

Soit $H_n = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$.
Les trois formulations suivantes sont équivalentes :

1. $A_1, \ldots, A_n \models B$
2. $H_n \Rightarrow B$ est valide.
3. $H_n \wedge \neg B$ est insatisfaisable.

Démonstration.

Elle se base sur les tables de vérité des connecteurs.
On procède en démontrant que $1 \Rightarrow 2$ puis $2 \Rightarrow 3$ et $3 \Rightarrow 1$. $\square$

Preuve (1/3)

- $1 \Rightarrow 2$: supposons que $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Soit une assignation v :

- si v n'est pas modèle de $A_1, \ldots, A_n$:
  pour un certain i on a $[A_i]_v = 0$, d'où $[H_n]_v = 0$.
- si v est modèle de $A_1, \ldots, A_n$:
  alors par hypothèse v est un modèle de B donc $[B]_v = 1$.

Dans tous les cas $[H_n \Rightarrow B]_v = 1$, donc $H_n \Rightarrow B$ est valide.

Preuve (2/3)

- $2 \Rightarrow 3$: supposons que $H_n \Rightarrow B$ est valide.
  Pour toute assignation v on a alors :
  - soit $[H_n]_v = 0$,
  - soit $[H_n]_v = 1$ et $[B]_v = 1$.

  Or $[H_n \wedge \neg B]_v = \min([H_n]_v, [\neg B]_v) = \min([H_n]_v, 1 - [B]_v)$.

  Dans les deux cas, nous obtenons $[H_n \wedge \neg B]_v = 0$.
  Donc $H_n \wedge \neg B$ est insatisfaisable.

Preuve (3/3)

- $3 \Rightarrow 1$: supposons que $H_n \wedge \neg B$ est insatisfaisable.
  Montrons que $A_1, \ldots, A_n \models B$.
  Soit v un modèle de $A_1, \ldots, A_n$:
  - $[H_n]_v = [A_1 \wedge \ldots \wedge A_n]_v = 1$.
  - D'après notre hypothèse $[\neg B]_v = 0$.
    D'où $1 - [B]_v = 0$ et donc $[B]_v = 1$: v est un modèle de B.

La validité du raisonnement par implications circulaires sera démontrée en exercice.

Illustration de la propriété

Exemple 1.2.28

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow c$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$ $\Rightarrow (a \Rightarrow c)$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$ $\wedge \neg (a \Rightarrow c)$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

Préambule

Comment prouver qu'une formule est valide ?

- Table de vérité
  - Problème : pour une formule à 100 variables, la table de vérité aura 2^{100} lignes (non calculable même par un ordinateur !).
- Idée :
  - Simplifier la formule en utilisant des règles de calcul
  - Puis étudier la formule simplifiée en utilisant les tables de vérités ou un raisonnement logique

La disjonction

- associative $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$
- commutative $x \vee y \equiv y \vee x$
- idempotente $x \vee x \equiv x$

Idem pour la conjonction.

Distributivité

- La conjonction est distributive sur la disjonction
  $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- La disjonction est distributive sur la conjonction
  $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Neutralité et Absorption

- $\perp$ est l'élément neutre de la disjonction $\perp \vee x \equiv x$
- $\top$ est l'élément neutre de la conjonction $\top \wedge x \equiv x$
- $\top$ est l'élément absorbant de la disjonction $\top \vee x \equiv \top$
- $\perp$ est l'élément absorbant de la conjonction $\perp \wedge x \equiv \perp$

Le Vercors c'est plein de surprises

Si on est à la fois *exploitant* et *ayant droit*, où peut-on passer ?

Négation

- Les lois de la négation :
  - $x \wedge \neg x \equiv \perp$
  - $x \vee \neg x \equiv \top$ (Le tiers-exclus)
- $\neg\neg x \equiv x$
- $\neg\perp \equiv \top$
- $\neg\top \equiv \perp$

Les lois de De Morgan

- $\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$
- $\neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y$

Augustus De Morgan (1860) étend les notions de l'algèbre de Boole :

- Travail sur les quantificateurs
- Notion de calcul sur des relations
  (voir aussi les travaux de C.S. Peirce)

qui déboucheront sur la logique du premier ordre (cf 2è partie du cours).

- Notion de dualité dans les algèbres de Boole

aujourd'hui connue principalement sous la forme des lois de De Morgan

- Participation (assez anecdotique) aux premières conjectures sur le théorème des quatre couleurs

Lois de simplification

Propriété 1.2.31

Pour tout x, y nous avons :

- $x \vee (x \wedge y) \equiv x$
- $x \wedge (x \vee y) \equiv x$
- $x \vee (\neg x \wedge y) \equiv x \vee y$

Substitution

Définition 1.3.1

Une substitution σ est une fonction des variables vers les formules.

$\sigma(A)$ = remplacer dans la formule toute variable x par la formule $\sigma(x)$.

Exemple : $A = \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

- Soit σ la substitution suivante : $\sigma(p) = (a \vee b), \sigma(q) = (c \wedge d)$
- $\sigma(A) = \neg((a \vee b) \wedge (c \wedge d)) \Leftrightarrow (\neg(a \vee b) \vee \neg(c \wedge d))$

Substitution à support fini

Définition 1.3.2

- Si une substitution n'affecte qu'un nombre fini de variables on la note $< x_1 := A_1, \ldots, x_n := A_n >$

Exemple 1.3.3

$A = x \vee x \wedge y \Rightarrow z \wedge y$ et $\sigma =< x := a \vee b, z := b \wedge c >$

$$\boxed{\sigma(A) = (a \vee b) \vee (a \vee b) \wedge y \Rightarrow (b \wedge c) \wedge y}$$

Substitution d'une formule valide

(On admet la propriété 1.3.4.)

Théorème 1.3.6

Si A est valide alors $\sigma(A)$ aussi (quelle que soit σ !).

Exemple 1.3.7

Soit A la formule $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.
Cette formule est valide, c'est une équivalence remarquable.
Soit σ la substitution suivante : $< p := (a \vee b), q := (c \wedge d) >$.
La formule

$\boxed{\sigma(A) = \neg((a \vee b) \wedge (c \wedge d)) \Leftrightarrow (\neg(a \vee b) \vee \neg(c \wedge d)) \text{ est aussi valide.}}$

Conséquence : les équivalences remarquables sont valables pour des formules quelconques, pas seulement pour des variables.

Remplacement

Définition 1.3.8

La formule D est obtenue en remplaçant dans C certaines occurrences de A par B si :

- C s’écrit $E < x := A >$
- D s’écrit $E < x := B >$

pour une certaine formule E.

Exemples

Exemple 1.3.9

Considérons la formule $C = ((a \Rightarrow b) \vee \neg(a \Rightarrow b))$.

- La formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences de $(a \Rightarrow b)$ par $(a \wedge b)$ est

  $$\boxed{D = ((a \wedge b) \vee \neg(a \wedge b))}$$

  avec $E = (x \vee \neg x)$.

- La formule obtenue en remplaçant la *première* occurrence de $(a \Rightarrow b)$ par $(a \wedge b)$ est

  $$\boxed{D = ((a \wedge b) \vee \neg(a \Rightarrow b))}$$

  avec $E = (x \vee \neg(a \Rightarrow b))$.

Propriétés des remplacements

Théorème 1.3.10

Si, en remplaçant A par B dans la formule C, on obtient D alors :
$(A \Leftrightarrow B) \models (C \Leftrightarrow D)$.

Exemple 1.3.12 : $p \Leftrightarrow q \models (p \vee (\boxed{p} \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \vee (\boxed{q} \Rightarrow r))$.

Corollaire 1.3.11

Si $A \equiv B$
et qu’en remplaçant A par B dans la formule C on obtient D
alors $C \equiv D$.

(On peut appliquer des équivalences n’importe où dans les formules.)

Définitions

Définition 1.4.1

- Un littéral est une variable ou la négation d'une variable.
- Un monôme est une conjonction de littéraux.
- Une clause est une disjonction de littéraux.
  (cas particuliers : 0 et 1)

Exemple 1.4.2

- $x, y, \neg z$ sont des littéraux.
- $x \wedge \neg y \wedge z$ est un monôme
- Le monôme $x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg x$ comporte x et $\neg x$: il vaut 0.
- $x \vee \neg y \vee z$ est une clause
- La clause $x \vee \neg y \vee z \vee \neg x$ comporte x et $\neg x$: elle vaut 1.

Forme normale

Definition 1.4.3

Formule en forme normale = seulement $\wedge, \vee$ et des négations sur les variables.

Exemple 1.4.4

La formule $\neg a \vee b$ est en forme normale.
$a \Rightarrow b$ est équivalente mais n'est pas en forme normale.

Toute formule admet une forme normale équivalente.

Mise en forme normale

1. **Élimination des équivalences**
   Remplacer $A \Leftrightarrow B$ par
   (a) $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
   OU
   (b) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
2. **Élimination des implications**
   Remplacer $A \Rightarrow B$ par $\neg A \vee B$
3. **Déplacement des négations vers les variables**
   Remplacer
   (a) $\neg\neg A$ par A
   (b) $\neg(A \vee B)$ par $\neg A \wedge \neg B$
   (c) $\neg(A \wedge B)$ par $\neg A \vee \neg B$

Pourquoi ce processus se termine-t-il ?

Preuve par récurrence sur la taille des formules.

Prouvons que toute formule équivaut à une formule sans implication.
(La terminaison des autres étapes se prouve de façon similaire).

Cas de base

Si $|A| = 0$, alors A est $\top$ ou $\perp$ ou une variable.
Par définition elle ne contient pas d'implication.

Suite de la preuve : cas récursif

Hypothèse de récurrence :

Supposons que la propriété soit vraie pour toute formule de taille $\leqslant n$,

et montrons qu'elle est vraie pour toute formule A de taille $n+1$:

- Cas 1 : $A = \neg B$ avec $|B| = n$.
  Par hypothèse de récurrence $B \equiv B'$ sans implication.
  D'où $A = \neg B'$ qui ne contient pas d'implication.
- Cas 2 : $A = (B \circ C)$ avec $|B| < n+1$ et $|C| < n+1$
  où $\circ$ est un connecteur binaire.
  Toujours par hypothèse de récurrence $B \equiv B'$ et $C \equiv C'$ sans implication.
  Alors il reste deux sous-cas :
  - si $\circ$ est une implication alors $A \equiv \neg B' \vee C'$ sans implication
  - si $\circ$ est un autre connecteur alors $A \equiv B' \circ C'$ sans implication

Accélérer la mise en forme normale

Simplifier le plus tôt possible :

1. Remplacer $\neg(A \Rightarrow B)$ par $A \wedge \neg B$
2. Remplacer une conjonction par $\perp$ si elle comporte une formule et sa négation
3. Remplacer une disjonction par $\top$ si elle comporte une formule et sa négation
4. Appliquer :
   - l'idempotence de la conjonction et de la disjonction,
   - le caractère neutre ou absorbant de $\perp$ et de $\top$,
   - remplacer $\neg\top$ par $\perp$ et $\neg\perp$ par $\top$.
5. Appliquer les simplifications :
   - $x \vee (x \wedge y) = x$,
   - $x \wedge (x \vee y) = x$,
   - $x \vee (\neg x \wedge y) = x \vee y$

Forme normale disjonctive

Définition 1.4.6

Une formule est en forme normale disjonctive (FND) si et seulement si elle est une disjonction (somme) de monômes.

Méthode : distribuer les conjonctions sur les disjonctions
$x \land (y \lor z) = (x \land y) \lor (x \land z)$
L'intérêt des FND est de mettre en évidence les modèles.

Exemple 1.4.7

$(x \land y) \lor (\neg x \land \neg y \land z)$ est une FND, qui a deux modèles principaux :

- $x = 1, y = 1$
- $x = 0, y = 0, z = 1$

Utilisation de la FND pour la validité et les contre-modèles

La mise en forme normale disjonctive permet également de déterminer si une formule est valide ou non.

Soit A une formule dont on souhaite déterminer la validité :

On transforme $\neg A$ en une disjonction de monômes équivalente B :

- Si $B = 0$ alors $\neg A = 0$, donc $A = 1$, c'est-à-dire, A est valide
- Sinon B est égal à une disjonction de monômes non nuls équivalente à $\neg A$, qui nous donnent des modèles de $\neg A$, donc des contre-modèles de A.

Exemple 1.4.9

Soit $A = (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$

Déterminer si A est valide.

$$\begin{aligned}
&\neg A \\
&\equiv (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge \neg(p \wedge q \Rightarrow r) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg(p \wedge q \Rightarrow r) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \wedge q \wedge \neg r) \\
&\equiv (\neg q \vee r) \wedge p \wedge q \wedge \neg r \\
&\equiv (r) \wedge p \wedge q \wedge \neg r \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\neg A = 0$ et $A = 1$, c'est-à-dire A est valide.

Exemple 1.4.10

Soit $A = (a \Rightarrow b) \wedge c \vee (a \wedge d)$.

$$\begin{array}{ll}
\neg A = \neg((a \Rightarrow b) \wedge c) \wedge \neg(a \wedge d) & \text{(de Morgan)} \\
= (\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg d) & \text{(de Morgan)} \\
= ((a \wedge \neg b) \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg d) & (\neg(\ldots \Rightarrow \ldots)) \\
= (a \wedge \neg b \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge \neg a) \vee (\neg c \wedge \neg d) & \\
 & \text{(distributivité } \vee \text{ sur } \wedge\text{)} \\
= (a \wedge \neg b \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge \neg a) \vee (\neg c \wedge \neg d) & \text{(1er monôme contradictoire)}
\end{array}$$

On obtient 3 modèles de $\neg A$: $(a = 1, b = 0, d = 0)$, $(a = 0, c = 0)$, $(c = 0, d = 0)$.
C'est-à-dire, des contre-modèles de A.
Donc A n'est pas valide.

Forme normale conjonctive

Définition 1.4.11

Une formule est en forme normale conjonctive (FNC) si et seulement si elle est une conjonction (produit) de clauses.

Appliquer la distributivité (!) de la disjonction sur la conjonction :

- $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

L'intérêt des FNC est de mettre en évidence les contre-modèles.

Exemple 1.4.12

$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$ est une FNC, qui a deux contre-modèles

- $x = 0, y = 0$
- $x = 1, y = 1, z = 0.$

Utilisée également en modélisation (SAT-solvers)

Exemples 1.4.8 et 1.4.13

Mise en FND de :

$$(a \lor b) \land (c \lor d \lor e) \equiv$$

$$\boxed{(a \land c) \lor (a \land d) \lor (a \land e) \lor (b \land c) \lor (b \land d) \lor (b \land e).}$$

Mise en FNC de :

$$(a \land b) \lor (c \land d \land e) \equiv$$

$$\boxed{(a \lor c) \land (a \lor d) \land (a \lor e) \land (b \lor c) \land (b \lor d) \land (b \lor e).}$$

BDDC (*Binary Decision Diagram based Calculator*)

BDDC est un outil pour la manipulation de formules propositionnelles développé par Pascal Raymond et disponible à l'adresse suivante :

`http://www-verimag.imag.fr/~raymond/home/tools/bddc/`

Aujourd'hui

- Les substitutions permettent de **déduire la validité** d'une formule à partir d'une autre
- Les remplacements permettent de modifier une partie d'une formule **sans changer sa signification** et autorisent donc à effectuer des calculs sur les formules
- Toute formule admet des formes normales qui permettent d'**identifier ses modèles** ou ses contre-modèles

La prochaine fois

- Algèbre de Boole
- Fonctions booléennes
- Résolution

À chercher : prouver par simplification de formule notre exemple

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$