Déduction Naturelle

Benjamin Wack

Université Grenoble Alpes

Février 2025

Au dernier cours

- Complétude et correction de la résolution
- algorithme DPLL

Exemple du cours : solution avec DPLL

$$\overline{p}+\bar{j}, p+j, \bar{j}+m, \overline{m}, \overline{p}$$

$$\Big\downarrow \text{RED}$$

$$p+j, \bar{j}+m, \overline{m}, \overline{p}$$

$$\Big\downarrow \text{RU : m=0, p=0}$$

$$j, \bar{j}$$

$$\Big\downarrow \text{RU}$$

$$\perp$$

Plan

Intuition

La résolution permet d'écrire des preuves formelles pour :

- les vérifier
- voire les générer

automatiquement

... mais la preuve produite est peu lisible.

Quand on écrit une démonstration « à la main »,
chaque étape élémentaire est compréhensible.

La déduction naturelle cherche à produire des **preuves formelles**
dont les étapes élémentaires sont **lisibles**.

La déduction naturelle (DN)

Nouveaux systèmes de déduction (1934) par Gentzen (1909-1945) :

- **Déduction naturelle** :
  - on démontre des conséquences $\Gamma \vdash p$ plutôt que des tautologies
  - un seul axiome $\Gamma,\ p \vdash p$
  - des règles d'introduction et d'élimination pour chaque connecteur
- **Calcul des séquents** :
  - $\Gamma \vdash \Delta$ si quand tout Γ est vrai, une des formules de Δ est vraie
  - règles d'introduction à gauche et à droite
  - règle de *coupure* $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, p \quad \Gamma', p \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$
- Calculer avec des démonstrations : **élimination des coupures**
  Toute démonstration qui n'utilise pas la règle du tiers exclus peut être transformée en une démonstration **constructive**.

Règle

Définition 3.1.1

Une règle est constituée :

- d'**hypothèses** ou **prémisses** $H_1, \ldots, H_n$
- d'une **conclusion** C
- éventuellement on étiquette une règle par son nom (R)

$$\frac{H_1 \ldots H_n}{C}\ R$$

Exemple : Preuve d'une conjonction

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I)$$

Types de règles

- **Des règles d'introduction** pour introduire un connecteur dans la conclusion.
- **Des règles d'élimination** pour éliminer un connecteur d'une prémisse.
- $+$ **deux règles spéciales**

Listes des règles (système NK de Gentzen)

Table 3.1

	Introduction	Élimination
Implication	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$	$\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E$
Conjonction	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\dfrac{A \wedge B}{A} \wedge E1$ $\dfrac{A \wedge B}{B} \wedge E2$
Disjonction	$\dfrac{A}{A \vee B} \vee I1$ $\dfrac{B}{A \vee B} \vee I2$	$\dfrac{A \vee B \quad A \Rightarrow C \quad B \Rightarrow C}{C} \vee E$
	Règle du faux	
$\perp$	$\dfrac{\perp}{A}$ *Efq*	
	Règle de réduction à l'absurde	
	$\dfrac{\neg\neg A}{A}$ *RAA*	

Connecteurs dérivés

$\top$, la négation et l'équivalence sont des abréviations ainsi définies :

- $\top$ abrège $\bot \Rightarrow \bot$.
- $\neg A$ abrège $A \Rightarrow \bot$.
- $A \Leftrightarrow B$ abrège $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Deux formules seront considérées comme égales si elles sont identiques aux abréviations près.

Par exemple, les formules $\neg\neg a$, $\neg a \Rightarrow \bot$ et $(a \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$ sont égales.

Deux formules égales aux abréviations près sont équivalentes.

Un exemple « simple »

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}\ {\Rightarrow}E \qquad \dfrac{A \qquad A \Rightarrow C}{C}\ {\Rightarrow}E}{B \wedge C}\ \wedge I$$

Qu'a-t-on démontré ? $B \wedge C$
sous les hypothèses $A,\ A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C$

autrement dit $A,\ A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C \models B \wedge C$

Tentative de définition de preuve

Soit Γ un ensemble de formules : les hypothèses.

Une preuve dans l'environnement Γ est une suite de formules telle que, sur toute ligne, la formule A est :

- la conclusion d'une règle du système
- dont les prémisses sont :
  - présentes dans Γ
  - ou présentes sur une des lignes précédentes.

Un exemple avec environnement

Prouvez $C \land D$ dans l'environnement $\{A \land B,\ \ A \Rightarrow C,\ \ B \Rightarrow D\}$

environnement		
référence	formule	
(i)	$A \land B$	
(ii)	$A \Rightarrow C$	
(iii)	$B \Rightarrow D$	
numero	preuve	justification
1	A	$\land E\ (i)$
2	C	$\Rightarrow E\ 1, (ii)$
3	B	$\land E\ (i)$
4	D	$\Rightarrow E\ 3, (iii)$
5	$C \land D$	$\land I\ 2, 4$

Comment démontrer une implication ?

Construire une preuve de $A \Rightarrow (B \vee A)$ sans environnement.

Principe : utiliser A pour démontrer $B \vee A$.
Dans une preuve, on aura des lignes de la forme `Supposons` formule.

numero	preuve	justification
1	`Supposons` A	
2	$B \vee A$	$\vee I$ 1
3	$A \Rightarrow B \vee A$	$\Rightarrow I$ 1,2

La règle fondamentale de la Déduction Naturelle

La règle d'introduction de l'implication :

Pour démontrer $A \Rightarrow B$,
commencer par **démontrer** B **avec l'hypothèse supplémentaire** A
puis se passer de cette hypothèse.

$$(\text{Si } A \models B \text{ alors } \models A \Rightarrow B)$$

$$\dfrac{\begin{array}{ccccc} [A] & & H_1 & \dots & H_n \\ & \ddots & \vdots & \iddots & \\ & & B & & \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

prouve $H_1, \dots, H_n \models A \Rightarrow B$.

Construction de preuves en arbre

Pour s'exercer à construire des preuves sous forme d'arbres, on peut s'aider du logiciel :

`http://www-sop.inria.fr/marelle/Laurent.Thery/peanoware/Nd.html`

Notion de contexte (1/2)

- Le contexte est la liste des hypothèses effectuées et pas encore intégrées dans une implication
- Un contexte par ligne de preuve
- Pour abréger, on note les numéros plutôt que les formules

Exemple 3.1.6 :

contexte	numéro	ligne	règle
1	1	Supposons a	
1,2	2	Supposons b	
1,2	3	$a \wedge b$	$\wedge$I 1,2
1	4	Donc $b \Rightarrow a \wedge b$	$\Rightarrow$I 2,3
1,5	5	Supposons e	

Ligne de preuve

Définition 3.1.2

Une ligne de preuve est de l'une des trois formes suivantes :

- `Supposons` formule   (pour ajouter une hypothèse)
- formule   (obtenue à l'aide des règles)
- `Donc` formule $\Rightarrow$ formule   (qui enlève la dernière hypothèse)

Ce dernier cas est la règle d'introduction de l'implication.

Exemples :

- `Supposons` $A \wedge B$
- A
- `Donc` $A \wedge B \Rightarrow A$

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]}{A}\wedge E}{A \wedge B \Rightarrow A}\Rightarrow I$$

Conséquence sur la structure des preuves

Définition 3.1.3

À toute étape d'une preuve,
il doit y avoir au moins autant de `Supposons` que de `Donc`.

Exemple 3.1.4

contexte	numéro	ligne
1	1	`Supposons` a
1	2	$a \vee b$
	3	`Donc` $a \Rightarrow a \vee b$
? ?	4	`Donc` $\neg a$
	5	`Supposons` b

Contexte (2/2)

Le contexte d'une formule représente les hypothèses qui ont permis de la déduire.

Définition 3.1.5

Initialement, le contexte est vide.

Si la ligne *i* est :

- `Supposons` A
  alors on ajoute la formule *i* au contexte précédent
- A
  alors on garde le même contexte
- `Donc` $A \Rightarrow B$
  alors on supprime la dernière formule du contexte précédent

Exemple de contexte

Donnez **les contextes** du brouillon de preuve suivant :

contexte	numéro	ligne
1	1	`Supposons` a
1	2	$a \vee b$
	3	`Donc` $a \Rightarrow a \vee b$
4	4	`Supposons` b
	5	`Donc` b

Danger : les hypothèses finissent par polluer la preuve.
(Qu'est-ce qui nous empêche ici de déduire $a \Rightarrow b$?)

Résolution *vs.* Déduction naturelle

Dans une preuve par **résolution**, chaque clause est construite en utilisant n'importe quelles clauses précédentes.

En **déduction naturelle**, au cours d'une preuve, on peut ajouter des hypothèses et les enlever. Les formules ne sont donc **pas** utilisables à volonté.

Formules utilisables (1/2)

Définition 3.1.7

La formule figurant sur une ligne est utilisable tant que son contexte (les hypothèses qui ont permis de la déduire) est présent.

Exemple 3.1.8

contexte	numéro	ligne
1	1	Supposons a
1	2	$a \vee b$
	3	Donc $a \Rightarrow b$
	4	a
	5	$b \vee a$

La formule de la ligne 2 est utilisable sur la ligne 2, et pas au delà.

Formules utilisables (2/2)

Donnez les lignes sur lesquelles les formules 1 et 3 sont **utilisables** dans l'exemple suivant :

contexte	numéro	ligne
1	1	Supposons a
1,2	2	Supposons b
1,2	3	c
1	4	Donc d
1,5	5	Supposons e

Preuve en déduction naturelle

Définition 3.1.9

Une preuve en déduction naturelle est une suite de lignes telles que :

1. Pour toute ligne « A », la formule est :
   - la conclusion d'une règle du système (autre que $\Rightarrow I$)
   - dont les prémisses sont utilisables à la ligne précédente
2. Pour toute ligne « $\texttt{Donc}\ B \Rightarrow C$ » :
   - B est l'hypothèse enlevée du contexte (sa dernière formule)
   - C est une formule utilisable à la ligne précédente

La dernière ligne de la preuve doit avoir un contexte vide ;
sa formule est la conclusion de la preuve.

De plus on peut avoir un environnement Γ de formules (hypothèses) utilisables sur toute ligne.
(à ne pas confondre avec le contexte, qui change en cours de preuve)

Exemple 3.1.11

Prouvons $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$.

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \Rightarrow b$	
1,2	2	Supposons $\neg b$	
1,2,3	3	Supposons a	
1,2,3	4	b	$\Rightarrow E$ 1, 3
1,2,3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1,2	6	Donc $\neg a$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1	7	Donc $\neg b \Rightarrow \neg a$	$\Rightarrow I$ 2, 6
	8	Donc $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$	$\Rightarrow I$ 1,7

Preuves avec abréviations *vs.* sans abréviations

cont.	n.	preuve avec abréviation	preuve sans abréviation	just.
1	1	Supposons $a \Rightarrow b$	Supposons $a \Rightarrow b$	
1,2	2	Supposons $\neg b$	Supposons $b \Rightarrow \perp$	
1,2,3	3	Supposons a	Supposons a	
1,2,3	4	b	b	$\Rightarrow E$ 1, 3
1,2,3	5	$\perp$	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1,2	6	Donc $\neg a$	Donc $a \Rightarrow \perp$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1	7	Donc $\neg b \Rightarrow \neg a$	Donc $(b \Rightarrow \perp) \Rightarrow (a \Rightarrow \perp)$	$\Rightarrow I$ 2, 6
	8	Donc $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$	Donc $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow \perp) \Rightarrow (a \Rightarrow \perp))$	$\Rightarrow I$ 1,7

Arbre (exemple 3.1.11)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(2)\cancel{\neg b} \qquad \dfrac{(1)\cancel{a \Rightarrow b} \quad (3)\cancel{a}}{(4)b} \Rightarrow E}{(5)\bot} \Rightarrow E}{(6)\neg a} \Rightarrow I[3]}{(7)\neg b \Rightarrow \neg a} \Rightarrow I[2]}{(8)(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)} \Rightarrow I[1]$$

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \Rightarrow b$	
1,2	2	Supposons $\neg b$	
1,2,3	3	Supposons a	
1,2,3	4	b	$\Rightarrow E$ 1, 3
1,2,3	5	$\bot$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1,2	6	Donc $\neg a$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1	7	Donc $\neg b \Rightarrow \neg a$	$\Rightarrow I$ 2, 6
	8	Donc $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$	$\Rightarrow I$ 1,7

Deuxième Exemple

Montrez que $a \land \neg a \Rightarrow b$.

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \land \neg a$	
1	2	a	$\land E1\ 1$
1	3	$\neg a$	$\land E2\ 1$
1	4	$\perp$	$\Rightarrow E\ 2,3$
1	5	b	$Efq\ 4$
	6	Donc $a \land \neg a \Rightarrow b$	$\Rightarrow I\ 1,5$

Preuves avec abréviations *vs.* sans abréviations (2/2)

contexte	numéro	preuve avec abréviations	preuve sans abréviations	justification
1	1	`Supposons` $a \wedge \neg a$	`Supposons` $a \wedge (a \Rightarrow \bot)$	
1	2	a	a	$\wedge E1\ 1$
1	3	$\neg a$	$a \Rightarrow \bot$	$\wedge E2\ 1$
1	4	$\bot$	$\bot$	$\Rightarrow E\ 2,3$
1	5	b	b	$Efq4$
	6	`Donc` $a \wedge \neg a \Rightarrow b$	`Donc` $a \wedge (a \Rightarrow \bot) \Rightarrow b$	$\Rightarrow I\ 1,5$

Aujourd’hui

- La déduction naturelle propositionnelle traduit par un système formel les **règles de déduction** utilisées en langage courant.
- Contrairement à la résolution, une preuve s’effectue dans un contexte (ensemble des formules **supposées** à un instant donné)

La prochaine fois

- Exemples avec les autres règles
- Complétude
- Correction
- Tactiques

À chercher :
Démonstration en déduction naturelle de

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$