Déduction Naturelle

Benjamin Wack

Université Grenoble Alpes

Février 2022

Au dernier cours

- Complétude et correction de la résolution
- Stratégie Complète
- Davis, Putnam, Logemann et Loveland

Exemple du cours : solution avec DPLL

$$\begin{array}{c} \overline{p}+\bar{j}, p+j, \bar{j}+m, \overline{m}, \overline{p} \\ \Big\downarrow \text{RED} \\ p+j, \bar{j}+m, \overline{m}, \overline{p} \\ \Big\downarrow \text{RU : m=0, p=0} \\ j, \bar{j} \\ \Big\downarrow \text{RU} \\ \perp \end{array}$$

Plan

Intuition

Quand on demande une preuve dans les cours de mathématiques,

quand on décompose un raisonnement en pas élémentaires évidents,

on pratique la déduction naturelle.

La déduction naturelle (DN)

Nouveaux systèmes de déduction proposés par Gentzen (1934) :

- **Déduction naturelle** :
  - on démontre des conséquences $\Gamma \vdash p$ plutôt que des tautologies
  - un seul axiome $\Gamma, p \vdash p$
  - des règles d'introduction et d'élimination pour chaque connecteur

- **Calcul des séquents** :
  - $\Gamma \vdash \Delta$ si quand tout Γ est vrai, une des formules de Δ est vraie
  - règles d'introduction à gauche et à droite
  - règle de *coupure* $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \color{red}{p} \quad \Gamma', \color{red}{p} \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$
- Calculer avec des démonstrations : **élimination des coupures**
  Toute démonstration qui n'utilise pas la règle du tiers exclus peut être transformée en une démonstration **constructive**.

Résolution *vs.* Déduction naturelle

Une preuve par **résolution** est une liste de clauses construites en utilisant n'importe quelles clauses précédentes.

En **déduction naturelle**, au cours d'une preuve, on peut ajouter des hypothèses et les enlever.

Connecteurs dérivés

$\top$, la négation et l'équivalence sont des abréviations ainsi définies :

- $\top$ abrège $\bot \Rightarrow \bot$.
- $\neg A$ abrège $A \Rightarrow \bot$.
- $A \Leftrightarrow B$ abrège $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Deux formules seront considérées comme égales si elles sont identiques aux abréviations près.

Par exemple, les formules $\neg\neg a$, $\neg a \Rightarrow \bot$ et $(a \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$ sont égales.

Deux formules égales aux abréviations près sont équivalentes.

Règle

Définition 3.1.1

Une règle est constituée :

- d'**hypothèses** ou **prémisses** $H_1, \ldots, H_n$
- d'une **conclusion** C
- éventuellement on étiquette une règle par son nom (R)

$$\frac{H_1 \ldots H_n}{C}\ R$$

Exemple : Preuve d'une conjonction

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I)$$

Types de règles

- **Des règles d'introduction** pour introduire un connecteur dans la conclusion.
- **Des règles d'élimination** pour éliminer un connecteur d'une prémisse.
- $+$ **deux règles spéciales**

Listes des règles (système NK de Gentzen)

Table 3.1

	Introduction	Élimination
Implication	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I$	$\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E$
Conjonction	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\dfrac{A \wedge B}{A} \wedge E1$ $\dfrac{A \wedge B}{B} \wedge E2$
Disjonction	$\dfrac{A}{A \vee B} \vee I1$ $\dfrac{B}{A \vee B} \vee I2$	$\dfrac{A \vee B \quad A \Rightarrow C \quad B \Rightarrow C}{C} \vee E$
	Règle du faux	
$\bot$	$\dfrac{\bot}{A}$ *Efq*	
	Règle de réduction à l'absurde	
	$\dfrac{\neg\neg A}{A}$ *RAA*	

$[A]$ signifie que A est une hypothèse

Un exemple « simple »

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}\Rightarrow E \qquad \dfrac{A \qquad A \Rightarrow C}{C}\Rightarrow E}{B \wedge C}\wedge I$$

Qu'a-t-on démontré ? $B \wedge C$
sous les hypothèses $A,\ A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C$

autrement dit $A,\ A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C \models B \wedge C$

La règle fondamentale de la Déduction Naturelle

La règle d'introduction de l'implication :

Si l'on peut déduire une formule B d'une hypothèse A, alors
on peut déduire $A \Rightarrow B$ en se passant de cette hypothèse.

(Si $A \models B$ alors $\models A \Rightarrow B$)

$$\dfrac{\begin{array}{ccccc} [A] & & H_1 & \ldots & H_n \\ & \ddots & \vdots & \iddots & \\ & & B & & \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I \qquad \text{prouve} \qquad H_1, \ldots, H_n \models A \Rightarrow B.$$

Ligne de preuve

Définition 3.1.2

Une ligne de preuve est de l'une des trois formes suivantes :

- `Supposons` formule (pour ajouter une hypothèse)
- formule (obtenue à l'aide des règles)
- `Donc` formule (pour enlever la dernière hypothèse)

Ce dernier cas est la règle d'introduction de l'implication.

Exemples :

- `Supposons` $A \wedge B$
- A
- `Donc` $A \wedge B \Rightarrow A$

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]}{A}\wedge E}{A \wedge B \Rightarrow A}\Rightarrow I$$

Brouillon de preuve

Définition 3.1.3

Brouillon de preuve = suite de lignes
telle qu'il y a toujours au moins autant de `Supposons` que de `Donc`.

Exemple 3.1.4

numéro	ligne
1	`Supposons` a
2	$a \vee b$
3	`Donc` $a \Rightarrow a \vee b$
4	`Donc` $\neg a$
5	`Supposons` b

Brouillon de preuve : exemples

Où sont les brouillons ?

num	ligne
1	Supposons $a \wedge b$
2	b
3	$b \vee c$
4	Donc $a \wedge b \Rightarrow b \vee c$
5	Donc $\neg a$
6	Supposons b

num	ligne
1	Supposons a
2	$a \vee b$
3	Donc $a \Rightarrow a \vee b$
4	Supposons b

num	ligne
1	Supposons a
2	$a \vee b$
3	Donc $a \Rightarrow a \vee b$
4	Supposons b
5	Donc $\neg a$

Contexte (1/2)

- Le contexte est la suite des hypothèses introduites par les lignes `Supposons` et non enlevées par les lignes `Donc`.
- Un contexte par ligne d'un brouillon de preuve.

Exemple 3.1.6 :

contexte	numéro	ligne	règle
1	1	`Supposons` a	
1,2	2	`Supposons` b	
1,2	3	$a \wedge b$	$\wedge$I 1,2
1	4	`Donc` $b \Rightarrow a \wedge b$	$\Rightarrow$I 2,3
1,5	5	`Supposons` e	

Contexte (2/2)

Le contexte d'une formule représente les hypothèses qui ont permis de la déduire.

Définition 3.1.5

Formellement : on note Γ_i le contexte de la ligne i.

$\Gamma_0 = \emptyset$

Si la ligne i est :

- `Supposons` A
  alors $\Gamma_i = \Gamma_{i-1}, i$
- A
  alors $\Gamma_i = \Gamma_{i-1}$
- `Donc` A
  alors Γ_i est obtenu en otant la dernière formule de Γ_{i-1}

Exemple de contexte

Donnez **les contextes** du brouillon de preuve suivant :

contexte	numéro	ligne
1	1	Supposons a
1	2	$a \vee b$
	3	Donc $a \Rightarrow a \vee b$
4	4	Supposons b
	5	Donc b

Formules utilisables (1/2)

Définition 3.1.7

- La formule figurant sur une ligne est sa conclusion.
- La conclusion d'une ligne est utilisable tant que son contexte (les hypothèses qui ont permis de la déduire) est présent.

Exemple 3.1.8

contexte	numéro	ligne
1	1	Supposons a
1	2	$a \vee b$
	3	Donc $a \Rightarrow b$
	4	a
	5	$b \vee a$

La conclusion de la ligne 2 est utilisable sur la ligne 2, et pas au delà.

Formules utilisables (2/2)

Donnez les lignes sur lesquelles les formules 1 et 3 sont **utilisables** dans l'exemple suivant :

contexte	numéro	ligne
1	1	Supposons a
1,2	2	Supposons b
1,2	3	c
1	4	Donc d
1,5	5	Supposons e

Preuve

Définition 3.1.9

Soit Γ un ensemble de formules.
Une preuve dans l'environnement Γ est un brouillon de preuve tel que :

1. Pour toute ligne « `Donc` », la formule est $B \Rightarrow C$ où :
   - B est l'hypothèse enlevée
     (la dernière formule du contexte précédent)
   - C est une formule utilisable à la ligne précédente, ou dans Γ.
2. Pour toute ligne « A », la formule A est :
   - la conclusion d'une règle (autre que $\Rightarrow I$)
   - dont les prémisses sont utilisables à la ligne précédente, ou $\in \Gamma$.

Attention :

- Le contexte Γ_i change en cours de preuve.
- L'environnement Γ est fixe.

Preuve de formules

Définition 3.1.10

Une preuve de la formule A dans l'environnement Γ est une preuve :

- vide (lorsque A est élément de Γ)
- ou dont la dernière ligne a pour conclusion A et un contexte vide.

Nous notons :

- $\Gamma \vdash A$ le fait qu'il y a une preuve de A dans l'environnement Γ
- $\Gamma \vdash P : A$ le fait que P est une preuve de A dans Γ
- Lorsque l'environnement est vide, nous abrégeons $\emptyset \vdash A$ en $\vdash A$
- Si l'environnement n'est pas indiqué, $\Gamma = \emptyset$

Premier Exemple (exemple 3.1.11)

Prouvons $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$.

contexte	numéro	preuve	justification

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \Rightarrow b$	

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \Rightarrow b$	
1,2	2	Supposons $\neg b$	

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \Rightarrow b$	
1,2	2	Supposons $\neg b$	
1,2,3	3	Supposons a	

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \Rightarrow b$	
1,2	2	Supposons $\neg b$	

Preuves avec abréviations *vs.* sans abréviations

cont.	n.	preuve avec abréviation	preuve sans abréviation	just.
1	1	Supposons $a \Rightarrow b$	Supposons $a \Rightarrow b$	
1,2	2	Supposons $\neg b$	Supposons $b \Rightarrow \perp$	
1,2,3	3	Supposons a	Supposons a	
1,2,3	4	b	b	$\Rightarrow E$ 1, 3
1,2,3	5	$\perp$	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1,2	6	Donc $\neg a$	Donc $a \Rightarrow \perp$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1	7	Donc $\neg b \Rightarrow \neg a$	Donc $(b \Rightarrow \perp) \Rightarrow (a \Rightarrow \perp)$	$\Rightarrow I$ 2, 6
	8	Donc $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$	Donc $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow \perp) \Rightarrow (a \Rightarrow \perp))$	$\Rightarrow I$ 1,7

Arbre (exemple 3.1.11)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(2)\cancel{\neg b} \qquad \dfrac{(1)\cancel{a \Rightarrow b} \quad (3)\cancel{a}}{(4)b}\Rightarrow E}{(5)\bot}\Rightarrow E}{(6)\neg a}\Rightarrow I[3]}{(7)\neg b \Rightarrow \neg a}\Rightarrow I[2]}{(8)(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)}\Rightarrow I[1]$$

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \Rightarrow b$	
1,2	2	Supposons $\neg b$	
1,2,3	3	Supposons a	
1,2,3	4	b	$\Rightarrow E$ 1, 3
1,2,3	5	$\bot$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1,2	6	Donc $\neg a$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1	7	Donc $\neg b \Rightarrow \neg a$	$\Rightarrow I$ 2, 6
	8	Donc $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$	$\Rightarrow I$ 1,7

Deuxième Exemple

Montrez que $a \wedge \neg a \Rightarrow b$.

contexte	numéro	preuve	justification

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \wedge \neg a$	

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \wedge \neg a$	
1	2	a	$\wedge E1$ 1

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \wedge \neg a$	
1	2	a	$\wedge E1$ 1
1	3	$\neg a$	$\wedge E2$ 1

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	Supposons $a \wedge \neg a$	
1	2	a	$\wedge E1$ 1

Preuves avec abréviations *vs.* sans abréviations (2/2)

contexte	numéro	preuve avec abréviations	preuve sans abréviations	justification
1	1	Supposons $a \wedge \neg a$	Supposons $a \wedge (a \Rightarrow \bot)$	
1	2	a	a	$\wedge E1$ 1
1	3	$\neg a$	$a \Rightarrow \bot$	$\wedge E2$ 1
1	4	$\bot$	$\bot$	$\Rightarrow E$ 2,3
1	5	b	b	$Efq4$
	6	Donc $a \wedge \neg a \Rightarrow b$	Donc $a \wedge (a \Rightarrow \bot) \Rightarrow b$	$\Rightarrow I$ 1,5

Aujourd'hui

- La déduction naturelle propositionnelle traduit par un système formel les **règles de déduction** utilisées en langage courant.
- Contrairement à la résolution, une preuve s'effectue dans un contexte (ensemble des formules **supposées** à un instant donné)

La prochaine fois

- Complétude
- Correction
- Tactiques

À chercher :
Démonstration en déduction naturelle de

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$