Examen INF402

Stéphane Devismes Benjamin Wack

mai 2019
2 pages
Total : 120 points + 5 de bonus
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 120 points, les 5 points supplémentaires sont considérés comme du bonus.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formule du premier ordre et Expansions (25 points))**.**
Pour chacune des formules suivantes :

— $A = \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$
— $B = \exists x (F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow (\forall x F(x) \Rightarrow \forall x G(x))$
— $C = \forall x \forall y (P(x, y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x P(x, x)$

1. *Donnez la signature correspondante.*
2. *Déterminez un contre-modèle de la formule par la méthode des expansions.*

□

Exercice 2 (Formalisation (25 points))**.**
La ville de Port-Réal *est secouée par un mouvement social important, les* « *boucliers bleus* »*. Le roi* Joffrey Baratheon *propose des états généraux afin d'apaiser la situation.* Tyrion Lannister*, la main du roi, donne son sentiment sur ce mouvement :*

1. « *Jon et Arya sont des boucliers bleus, ils ne veulent pas du même chef. De plus, ni l'un ni l'autre ne veut de Robb comme chef.* »
2. « *Plusieurs boucliers bleus (au moins deux) veulent être chef.* »
3. « *Tous les boucliers bleus adhèrent aux mêmes idées que celui qu'ils veulent comme chef, sauf si celui-ci participe aux états généraux.* »
4. « *Jon est le seul bouclier bleu qui participera aux états généraux.* »
5. « *Quelque soit le bouclier bleu, on en trouve toujours un autre qui n'adhère pas aux mêmes idées que lui.* »

À l'aide de la signature suivante, formaliser les affirmations de Tyrion Lannister.

— Arya*,* Jon *et* Robb *sont trois constantes.*
— Bleu(x) *signifie que x est un bouclier bleu.*
— *La fonction* Favori(x) *renvoie le chef souhaité par x.*
— *La relation* Adhere(x,y) *formalise le fait que x adhère aux mêmes idées que y.*
— *La relation* Participe(x) *formalise le fait que x va participer aux états généraux.*

□

Exercice 3 (Unification (15 points)).
Pour chacune des équations suivantes, déterminez si elle admet une solution, et si oui déterminez un unificateur le plus général. Vous utiliserez pour cela l'algorithme du cours dont vous détaillerez les étapes en donnant à chaque fois le nom des règles utilisées.

1. $\neg f(a, x, g(y, b)) = \neg f(a, z, g(b, z))$
2. $f(r(z), z, b) = f(x, g(y, a), y)$
3. $f(x, z, y) = f(y, r(x), g(a, r(z)))$

□

Exercice 4 (Skolémisation (10 points)).
Considérons le raisonnement dont les hypothèses sont :
$H_1 \;=\; \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow R(x, y))$
$H_2 \;=\; \forall x \exists y (P(y) \vee R(x, y))$
et dont la conclusion est :
$C \;=\; \exists x \exists y\; R(x, y)$
Montrez que ce raisonnement est correct par la méthode de Herbrand, en donnant les étapes suivantes :

1. *Skolémiser puis mettre en forme clausale les hypothèses et la négation de la conclusion.*
2. *Proposer des instances contradictoires de ces clauses.*

□

Exercice 5 (Résolution (15 points)).
Considérons l'ensemble suivant de clauses du premier ordre :

$$\Gamma \;=\; \{P(z) \vee Q(b, a) \vee \neg R(x), P(f(a)) \vee \neg Q(x, y), \neg P(x) \vee \neg P(f(y)), Q(f(a), a) \vee R(z)\}$$

Nous voulons montrer que cet ensemble de clauses est insatisfaisable par instanciation et par résolution.

1. *Trouvez des instances contradictoires de ces clauses et montrez par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.*
2. *Donnez une preuve directe du caractère contradictoire de Γ par factorisation, copie et résolution binaire. Il est possible que toutes les règles ne soient pas utilisées.*

□

Exercice 6 (Déduction naturelle (20 points)).
Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre. Comme vu en cours et en TD, on numérotera les formules et on indiquera pour chaque ligne le contexte, la règle appliquée et les prémisses utilisées.

1. $\forall x (Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge R(x))$
2. $\forall x (f(x) = x) \Rightarrow \forall x \forall y (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

□

Exercice 7 (Démonstration par récurrence (15 points, exercice du poly)).
Montrer que toute formule ***propositionelle*** *construite avec une seule variable x, uniquement $\vee$ et $\wedge$ et sans négation est équivalente à une formule de taille 0.* □

Corrigés

Exercice 1, page 1

— 1. Signature : $\{R^{r2}\}$
  2. Contre-modèle par expansion :
     $D = \{0\}$: $R(0,0) \Rightarrow R(0,0)$ valide
     $D = \{0,1\}$: $(R(0,0) \Rightarrow R(0,0)).(R(0,1) \Rightarrow R(1,0)).(R(1,0) \Rightarrow R(0,1)).(R(1,1) \Rightarrow R(1,1))$
     Tout R_I contenant un seul des couples $(0,1)$ et $(1,0)$ convient.

— 1. Signature : $\{F^{r1}, G^{r1}\}$
  2. Contre-modèle par expansion :
     $D = \{0\}$: $(F(0) \Rightarrow G(0)) \Rightarrow (F(0) \Rightarrow G(0))$ valide
     $D = \{0,1\}$:$(F(0) \Rightarrow G(0)) + (F(1) \Rightarrow G(1)) \Rightarrow F(0).F(1) \Rightarrow G(0).G(1)$
     $F_I = \{0,1\}$ et G_I contenant un et un seul élément du domaine.

— 1. Signature : $\{P^{r2}, =^{r2}\}$
  2. Contre-modèle par expansion :
     $D = \{0\}$: $(P(0,0) \Rightarrow 0 = 0) \Rightarrow P(0,0)$
     $P_I = \{\}$.

Exercice 2, page 1

1. « Jon et Arya sont des boucliers bleus, ils ne veulent pas du même chef. De plus ni l'un ni l'autre ne veut de Robb comme chef. »

   $$Bleu(Jon) \wedge Bleu(Arya) \wedge \neg(Favori(Jon) = Favori(Arya)) \wedge \neg(Favori(Jon) = Robb) \wedge \neg(Favori(Arya) = Robb)$$

2. « Plusieurs boucliers bleus (au moins deux) veulent être chef. »

   $$\exists x \exists y (Bleu(x) \wedge Bleu(y) \wedge \neg(x = y) \wedge Favori(x) = x \wedge Favori(y) = y)$$

3. « Tous les boucliers bleus adhèrent aux mêmes idées que celui qu'ils veulent comme chef, sauf si celui-ci participe aux états généraux. »

   $$\forall x (Bleu(x) \Rightarrow Adhere(x, Favori(x)) \vee Participe(Favori(x)))$$

   (Un "ou exclusif" serait mieux approprié mais on ne l'exigera pas.)

4. « Jon est le seul bouclier bleu qui participera aux états généraux. »

   $$\forall x (Bleu(x) \wedge Participe(x) \Leftrightarrow x = Jon)$$

5. « Quelque soit le bouclier bleu, on en trouve toujours un autre qui n'adhère pas aux mêmes idées que lui. »

   $$\forall x (Bleu(x) \Rightarrow \exists y (Bleu(y) \wedge \neg Adhere(y, x)))$$

   (On peut aussi mentionner $x \neq y$ à droite de l'implication mais il ne sera pas exigé.)

Exercice 3, page 2

1. $\neg f(a,x,g(y,b)) = \neg f(a,z,g(b,z))$
   Décomposition : $f(a,x,g(y,b)) = f(a,z,g(b,z))$
   Décomposition : $a = a,\ x = z,\ g(y,b) = g(b,z)$
   Identité : $x = z,\ g(y,b) = g(b,z)$
   Décomposition : $x = z,\ y = b,\ b = z$
   Élimination de y **:** $x = z,\ y := b,\ b = z$
   Orientation : $x = z,\ y := b,\ z = b$
   Élimination de z **:** $x = b,\ y := b,\ z := b$
   Élimination de x **:** $x := b,\ y := b,\ z := b$
   $< x := b, y := b, z := b >$ est une solution la plus générale de l'équation.
2. $f(r(z),z,b) = f(x,g(y,a),y)$
   Décomposition : $r(z) = x,\ z = g(y,a),\ b = y$
   Orientation : $x = r(z),\ z = g(y,a),\ b = y$
   Orientation : $x = r(z),\ z = g(y,a),\ y = b$
   Élimination de y **:** $x = r(z),\ z = g(b,a),\ y := b$
   Élimination de z **:** $x = r(g(b,a)),\ z := g(b,a),\ y := b$
   Élimination de x **:** $x := r(g(b,a)),\ z := g(b,a),\ y := b$
   $< x := r(g(b,a)), z := g(b,a), y := b >$ est une solution la plus générale de l'équation.
3. $f(x,z,y) = f(y,r(x),g(a,r(z)))$
   Décomposition : $x = y,\ z = r(x),\ y = g(a,r(z))$
   Élimination de z **:** $x = y,\ z := r(x),\ y = g(a,r(r(x)))$
   Élimination de y **:** $x = g(a,r(r(x))),\ z := r(x),\ y := g(a,r(r(x)))$
   Élimination de x **:** échec.

Exercice 4, page 2

1. Forme normale :
$$\begin{array}{rcl} H_1 & = & \forall x \exists y (\overline{P(x)} + R(x,y)) \\ H_2 & = & \forall x \exists y (P(y) + R(x,y)) \\ \neg C & = & \forall x \forall y\ \overline{R(x,y)} \end{array}$$
2. Forme propre :
$$\begin{array}{rcl} H_1 & = & \forall x \exists y (\overline{P(x)} + R(x,y)) \\ H_2 & = & \forall z \exists t (P(t) + R(z,t)) \\ \neg C & = & \forall u \forall v\ \overline{R(u,v)} \end{array}$$
3. Elimination des $\exists$:
$$\begin{array}{rcl} H_1 & : & \forall x (\overline{P(x)} + R(x,f(x))) \\ H_2 & : & \forall z (P(g(z)) + R(z,g(z))) \\ \neg C & : & \forall u \forall v\ \overline{R(u,v)} \end{array}$$
4. Enlèvement des $\forall$ et forme clausale :
$$\overline{P(x)} + R(x,f(x)), \quad P(g(z)) + R(z,g(z)), \quad \overline{R(u,v)}$$
5. Instances contradictoires :
$$\overline{P(g(a))} + R(g(a),f(g(a))), \quad P(g(a)) + R(a,g(a)), \quad \overline{R(g(a),f(g(a)))}, \quad \overline{R(a,g(a))}$$

Exercice 5, page 2

Instanciation : Nous obtenons les instances contradictoires suivantes :

$$P(f(a)) \vee Q(b,a) \vee \neg R(a), P(f(a)) \vee \neg Q(b,a), P(f(a)) \vee \neg Q(f(a),a), \neg P(f(a)), Q(f(a),a) \vee R(a)$$

Par résolution propositionnelle nous avons la preuve :

1 :	$P(f(a)) \vee \neg Q(b,a)$	Hypothèse
2 :	$\neg P(f(a))$	Hypothèse
3 :	$\neg Q(b,a)$	Révolvant 1,2
4 :	$P(f(a)) \vee Q(b,a) \vee \neg R(a)$	Hypothèse
5 :	$P(f(a)) \vee \neg R(a)$	Résolvant 3,4
6 :	$\neg R(a)$	Résolvant 2,5
7 :	$P(f(a)) \vee \neg Q(f(a),a)$	Hypothèse
8 :	$\neg Q(f(a),a)$	Résolvant 2,7
9 :	$Q(f(a),a) \vee R(a)$	Hypothèse
10 :	$R(a)$	Résolvant 8,9
11 :	$\perp$	Résolvant 6,10

Résolution binaire :

1 :	$P(f(a)) \vee \neg Q(x,y)$	Hypothèse	
2 :	$\neg P(x) \vee \neg P(f(y))$	Hypothèse	
3 :	$\neg P(f(y))$	Factorisation	$< x := f(y) >$
4 :	$P(f(a)) \vee \neg Q(x_0, y_0)$	Copie de 1	$< x := x_0, y := y_0 >$
5 :	$\neg Q(x_0, y_0)$	Résolvant binaire 3,4	$< y := a >$
6 :	$P(z) \vee Q(b,a) \vee \neg R(x)$	Hypothèse	
7 :	$P(z) \vee \neg R(x)$	Résolvant binaire 5,6	$< x_0 := b, y_0 := a >$
8 :	$\neg R(x)$	Résolvant binaire 3,7	$< z := f(y) >$
9 :	$Q(f(a),a) \vee R(z)$	Hypothèse	
10 :	$R(z)$	Résolvant binaire 5,9	$< x_0 := f(a), y_0 := a >$
11 :	$\perp$	Résolvant binaire 8,10	$< x := z >$

Exercice 6, page 2

1. $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	
1	2	$\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$	$\wedge$E1 1
1	3	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\wedge$E2 1
1,4	4	Supposons $P(x) \wedge Q(x)$	
1,4	5	$P(x)$	$\wedge$E1 4
1,4	6	$Q(x)$	$\wedge$E2 4
1,4	7	$Q(x) \Rightarrow R(x)$	$\forall$E x, 2
1,4	8	$R(x)$	$\Rightarrow$E 6, 7
1,4	9	$P(x) \wedge R(x)$	$\wedge$I 5, 8
1,4	10	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\exists$I x, 9
1	11	Donc $(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\Rightarrow$I 4, 10
1	12	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\exists$E 3, 11
	13	Donc $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\Rightarrow$I 1, 12

2. $\forall x(f(x) = x) \Rightarrow \forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x(f(x) = x)$	
1,2	2	`Supposons` $f(x) = f(y)$	
1,2	3	$f(x) = x$	$\forall E$ 1,x
1,2	4	$f(y) = y$	$\forall E$ 1,y
1,2	5	$x = f(y)$	*cong* 3,2
1,2	6	$x = y$	*cong* 4,5
1	7	`Donc` $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$	$\Rightarrow I$ 2,7
1	8	$\forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$	$\forall I$ 7
1	9	$\forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$	$\forall I$ 8
	10	`Donc` $\forall x(f(x) = x) \Rightarrow \forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$	$\Rightarrow I$ 1,9

Exercice 7, page 2

Nous effectuons une preuve par récurrence sur la taille des formules. Considérons une formule F construite avec une seule variable x, uniquement $\vee$ et $\wedge$ et sans négation.

Cas de base : $|F| = 0$. La récurrence est trivialement vérifiée dans ce cas.

Induction : $|F| = n + 1$ et supposons que toutes les formules construite avec une seule variable x, uniquement $\vee$ et $\wedge$ et sans négation de taille inférieure ou égale à n sont équivalentes à une formule de taille 0. Nous avons deux cas duaux, où $|A| \leq n$ et $|B| \leq n$, donc par hypothèse de récurrence A et B sont donc équivalentes à une formule de taille 0, c'est-à-dire 0, 1, ou x :

- $F = (A \vee B)$. Nous avons donc 9 cas à examiner :
  - $A = 0$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = x$, donc $F = x$.
  - $A = 1$
    - $B = 0$, donc $F = 1$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = x$, donc $F = 1$.
  - $A = x$
    - $B = 0$, donc $F = x$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = x$, donc $F = x$.
- $F = (A \wedge B)$. Nous avons donc 9 cas à examiner :
  - $A = 0$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = 0$.
    - $B = x$, donc $F = 0$.
  - $A = 1$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = x$, donc $F = x$.
  - $A = x$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = x$.
    - $B = x$, donc $F = x$.