Examen INF402

Frédéric Prost Benjamin Wack

16 mai 2023
2 pages
Total : 120 points (noté sur 100)
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 100 points (total divisé par 5), il est donc possible de faire l'impasse sur un des exercices sans pénalité.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formalisation (20 points))**.**
Nous considérons la signature $\Sigma = \{animal^{r1},\ plante^{r1},\ mange^{r2},\ pluspetit^{r2}\}$.

1. (12 points) *Exprimer en logique du premier ordre et en utilisant la signature* Σ *les phrases suivantes :*
   (a) *Il existe des animaux qui mangent à la fois des plantes et des animaux.*
   (b) *Aucune plante ne mange d'animal.*
   (c) *Tous les animaux mangent soit toutes les plantes, soit certains animaux plus petits qu'eux.*
   (d) *Les animaux qui mangent d'autres animaux mangent tous les animaux plus petits qu'eux.*
2. (8 points) *Exprimer en français les propositions logiques suivantes :*
   (a) $\forall x \neg(animal(x) \Leftrightarrow plante(x))$
   (b) $\exists x(plante(x) \wedge \forall y(plante(y) \wedge x \neq y \Rightarrow pluspetit(y, x))$
   (c) $\exists x \exists y(animal(x) \wedge animal(y) \wedge mange(x, y) \wedge \forall z(mange(x, z) \Rightarrow y = z))$

□

Exercice 2 (Expansions (20 points))**.**
À l'aide de la méthode des expansions, déterminer **un contre-modèle** *de chacune de ces formules :*

1. (10 points) $A = \big(\forall x Q(x) \implies \forall x P(x)\big) \implies \forall x\big(Q(x) \implies P(x)\big)$.
2. (10 points) $B = \forall x \exists y\big((x = y) \implies P(x, y)\big) \implies \forall x \forall y\big(P(x, y) \implies (x = y)\big)$.

□

Exercice 3 (Unification (15 points))**.**
Pour chacune des équations suivantes, déterminez si elle admet une solution, et si oui déterminez un unificateur le plus général. Vous utiliserez pour cela l'algorithme du cours dont vous détaillerez les étapes en donnant à chaque fois le nom des règles utilisées.
a et b sont des constantes ; f, g et h sont des fonctions.

1. (5 points) $f\big(x, f(u, x)\big) = f\big(f(y, a), f(z, f(b, z))\big)$
2. (5 points) $h\big(z, f(y, g(a, x))\big) = h\big(f(b, b), f(z, g(x, h(x, x)))\big)$
3. (5 points) $f\big(h(g(a, x), g(z, z)), g(z, z)\big) = f\big(h(y, y), y\big)$

□

Exercice 4 (Skolémisation (15 points)).

Soit A la formule suivante : $A = \Big(\exists x \forall y Q(x,y) \wedge \forall x\big(Q(x,x) \Rightarrow \exists y R(y,x)\big)\Big) \Rightarrow \exists y \exists x R(x,y)$

Montrez que A est valide en montrant que $\neg A$ est contradictoire par la méthode de Herbrand, en suivant les étapes suivantes :

1. (10 points) *Skolémisez $\neg A$ puis mettez-la en forme clausale.*
2. (5 points) *Proposez des instances contradictoires des clauses obtenues et montrez la contradiction par résolution propositionnelle.*

□

Exercice 5 (Résolution (10 points)).

Considérons l'ensemble suivant de clauses du premier ordre :

$$\Gamma \ = \ \{\overline{P(x)} + \overline{P(f(a))} + Q(y), P(y), \overline{P(g(b,x))} + \overline{Q(b)}, \overline{P(f(x))} + Q(x)\}$$

Nous voulons montrer que cet ensemble de clauses est insatisfaisable par instanciation ou par résolution. ***Au choix :*** *(vous n'obtiendrez pas le double de points en utilisant les deux méthodes)*

1. (10 points) *Trouvez des instances contradictoires de ces clauses et montrez par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.*

   OU

2. (10 points) *Donnez une preuve directe du caractère contradictoire de Γ par factorisation, copie et résolution binaire. Il est possible que toutes les règles ne soient pas utilisées.*

□

Exercice 6 (Déduction naturelle (20 points)).

Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre. Comme vu en cours et en TD, on numérotera les lignes de la preuve, et on indiquera pour chaque ligne la formule démontrée, le contexte, la règle appliquée et les prémisses utilisées.

1. $\forall y \exists x \neg Q(x,y) \Rightarrow \neg \forall x \forall y Q(x,y)$
2. $\forall x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y) \Rightarrow x \neq y)$

□

Exercice 7 (Ensemble complet et incomplet de connecteurs, exercice du poly (20 points)).

Un ensemble de constantes et de connecteurs est dit complet*, si toute fonction booléenne est exprimable avec ces constantes et ces connecteurs. Nous avons notamment vu en cours un théorème qui exprime que l'ensemble $\{\bot, \top, \neg, \vee, \wedge\}$ est complet.*

1. *Soit $\mid$ l'opération suivante : $x \mid y$ est vrai si et seulement si ni l'un, ni l'autre ne sont vrais, autrement dit $x \mid y = 1$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$. Cette opération est aussi appelée* ni *car $x \mid y$ est vrai si et seulement si ni x, ni y ne sont vrais.*

   Montrer que cette opération (seule !) est complète.

2. *Montrer que l'ensemble $\{\top, \Rightarrow\}$ est incomplet.*

   Indication *: on pourra montrer que toute formule construite uniquement avec $\top$ et $\Rightarrow$ prend la valeur 1 quand toutes ses variables prennent la valeur 1. On en déduira alors assez facilement une fonction booléenne qui ne peut pas être exprimée avec cet ensemble.*

□

Corrigés

Exercice 1, page 1

1. $\exists x \exists y \exists z(animal(x) \wedge plante(y) \wedge animal(z) \wedge mange(x, y) \wedge mange(x, z))$
2. $\forall x(plante(x) \Rightarrow \forall y(animal(y) \Rightarrow \neg mange(x, y)))$
3. $\forall x(animal(x) \Rightarrow \forall y(plante(y) \Rightarrow mange(x, y)) \vee \exists y(animal(y) \wedge pluspetit(y, x) \wedge mange(x, y)))$
4. $\forall x(animal(x) \wedge \exists y(animal(y) \wedge mange(x, y)) \Rightarrow \forall z(animal(z) \wedge pluspetit(z, x) \Rightarrow mange(x, z))$
5. Tout être est soit une plante soit un animal, mais jamais les deux à la fois.
6. Il existe une plante plus grande que toutes les autres.
7. Il existe un animal qui ne mange qu'une seule espèce d'animal.

Exercice 2, page 1

1. La 1-expansion est valide : $(Q(0) \implies P(0)) \implies (Q(0) \implies P(0))$
   La 2-expansion est : $(Q(0).Q(1) \implies P(0).P(1)) \implies (Q(0) \implies P(0)).(Q(1) \implies P(1))$ Un contre modèle est $Q_I = \{0\}$ et $P_I = \{1\}$ ou $\emptyset$ (on a un contre modèle symétrique avec Q_I=$\{1\}$).
2. La 1-expansion est valide : $((0 = 0) \implies P(0,0)) \implies (P(0,0) \implies 0 = 0)$ pour toutes les interprétations de P.
   La 2-expansion est :
   $(((0 = 0) \implies P(0,0)) + ((0 = 1) \implies P(0,1)))$.
   $(((1 = 0) \implies P(1,0)) + ((1 = 1) \implies P(1,1))) \implies (P(0,0) \implies 0 = 0).(P(1,0) \implies 1 = 0)$.
   $(P(0,1) \implies 0 = 1).(P(1,1) \implies 1 = 1)$
   Un contre modèle est donnée par l'interprétation $P_I = \{(0,1),(1,0)\}$ (ou contenant un de ces deux couples).

Exercice 3, page 1

1. Utilisation de décomposition : $(1) x = f(y, a)$, $(2) u = z$, $(3) x = f(b, z)$.
   Elimination de (1) dans (3) donne (4) $f(y, a) = f(b, z)$.
   Utilisation de décomposition sur (4) donne (5) $y = b$, (6) $z = a$,
   on élimine z dans (2) en utilisant (6).
   On trouve $\sigma = \{x := f(b, a), y := b, u := a, z := a\}$.
2. Utilisation de décomposition : (1) $z = f(b, b)$, $(2) f(y, g(a, x)) = f(z, g(x, h(x, x)))$.
   Décomposition de (2) donne $(3) y = z$, (4) $g(a, x) = g(x, h(x, x))$.
   Décomposition de (4) donne $(5) x = a$, (6) $x = h(x, x)$.
   Échec d'élimination en (6) l'algorithme s'arrête pas d'unification possible.
3. Utilisation de décomposition : $(1) h(g(a, x), g(z, z)) = h(y, y)$, $(2) y = g(z, z)$.
   Décomposition de (1) donne $(3) g(a, x) = y$ et $(4) y = g(z, z)$.
   On peut supprimer (4) qui est la même équation que (2).
   On élimine y dans (3) avec (2) ce qui donne $(5) g(z, z) = g(a, x)$.
   Décomposition de (5) donne (6) $z = a$ et (7) $z = x$.
   On trouve $\sigma = \{z := a, x := a, y = g(a, a)\}$.

Exercice 4, page 2

1. — $\neg A \equiv \exists x \forall y Q(x,y) \wedge \forall x\big(\neg Q(x,x) \vee \exists y R(y,x)\big) \wedge \neg\exists y \exists x R(x,y)$
   — Forme normale : $\exists x \forall y Q(x,y) \wedge \forall x\big(\neg Q(x,x) \vee \exists y R(y,x)\big) \wedge \forall y \forall x \neg R(x,y)$
   — Forme propre : $\exists x \forall y Q(x,y) \wedge \forall z\big(\neg Q(z,z) \vee \exists t R(t,z)\big) \wedge \forall u \forall v \neg R(v,u)$
   — Élimination des $\exists$: $\forall y Q(a,y) \wedge \forall z\big(\neg Q(z,z) \vee R(f(z),z)\big) \wedge \forall u \forall v \neg R(v,u)$
   — Élimination des $\forall$: $\forall y \forall z \forall u \forall v \Big(Q(a,y) \wedge \big(\neg Q(z,z) \vee R(f(z),z)\big) \wedge \neg R(v,u)\Big)$
   — Forme clausale : $Q(a,y)$, $\overline{Q(z,z)} + R(f(z),z)$, $\overline{R(v,u)}$
2. On instancie $y := a, z := a, v := f(a), u := a$.
   Alors $Q(a,a)$ et $\overline{Q(a,a)} + R(f(a),a)$ ont pour résolvant $R(f(a),a)$ qui est contradictoire avec $\overline{R(f(a),a)}$.

Exercice 5, page 2

— On effectue $\{x := f(a), y := b\}$ dans $\overline{P(x)} + \overline{P(f(a))} + Q(y)$ ce qui donne $\overline{P(f(a))} + Q(b)$ on applique la résolution avec $P(y)$ instanciée avec $\{y := f(a)\}$ ce qui donne la résolvante (1) $Q(b)$.
  On fait une autre instance de $P(y)$ avec $\{y := g(b,a)\}$ ce qui donne $P(g(b,a))$. En instantiant $\overline{P(g(b,x)), \overline{Q(b)}}$ avec $\{x := a\}$ on obtient $\overline{P(g(b,a)), \overline{Q(b)}}$. En appliquant la résolution à ces deux instantiations on obtient (2) $\overline{Q(b)}$.
  On conclut en faisant une résolution sur (1) et (2) qui donne la clause vide.
— Par factorisation de $\overline{P(x)} + \overline{P(f(a))} + Q(y)$ on obtient $\overline{P(f(a))} + Q(y)$. Par résolution propositionnelle avec $P(y)$ on obtient $Q(y)$. Par résolution propositionnelle entre $P(y)$ et $\overline{P(g(b,x)) + \overline{Q(b)}}$ on obtient $\overline{Q(b)}$ avec une dernière résolution propositionnelle entre $Q(y)$ et $\overline{Q(b)}$ on trouve la clause vide.

Exercice 6, page 2

1. *(10 points)* $\forall y \exists x \neg Q(x,y) \Rightarrow \neg \forall x \forall y Q(x,y)$

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	`Supposons` $\forall y \exists x \neg Q(x,y)$	
1,2	2	`Supposons` $\forall x \forall y Q(x,y)$	
1,2	3	$\exists x \neg Q(x,y)$	$\forall E y$ 2
1,2,4	4	`Supposons` $\neg Q(x,y)$	
1,2,4	5	$\forall y Q(x,y)$	$\forall E x$ 4
1,2,4	6	$Q(x,y)$	$\forall E y$ 5
1,2,4	7	$\perp$	$\Rightarrow E$ 4,6
1,2	8	`Donc` $\neg Q(x,y) \Rightarrow \perp$	$\Rightarrow I$ 4, 7
1,2	9	$\perp$	$\exists E$ 3,8
	10	`Donc` $\neg \forall x \forall y Q(x,y)$	$\Rightarrow I$ 2, 9
	11	`Donc` $\forall y \exists x \neg Q(x,y) \Rightarrow \neg \forall x \forall y Q(x,y)$	$\Rightarrow I$ 1, 10

2. *(10 points)* $\forall x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y) \Rightarrow x \neq y)$

contexte	numéro	preuve	justification
1	1	`Supposons` $P(x) \wedge \neg P(y)$	
1,2	2	`Supposons` $x = y$	
1,2	3	$P(x)$	$\wedge E1$ 1
1,2	4	$\neg P(y)$	$\wedge E2$ 1
1,2	5	$P(y)$	*cong* 2,3
1,2	6	$\perp$	$\Rightarrow E$ 4,5
1	7	`Donc` $x \neq y$	$\Rightarrow I$ 2,6
	8	`Donc` $P(x) \wedge \neg P(y) \Rightarrow x \neq y$	$\Rightarrow I$ 1,7
	9	$\forall y (P(x) \wedge \neg P(y) \Rightarrow x \neq y)$	$\forall I$ 8
	10	$\forall x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y) \Rightarrow x \neq y)$	$\forall I$ 9

Exercice 7, page 2

1. Montrons que $\mid$, définie par $x \mid y = 1$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$, est complète.

   Les connecteurs $\{\neg, \bot, \vee, \wedge\}$ sont définissables à l'aide de $\mid$:
   — $\neg x = x \mid x$
   — $\bot = \neg x \mid x = (x \mid x) \mid x$
   — $x \vee y = \overline{x \mid y} = (x \mid y) \mid (x \mid y)$
   — $x \wedge y = \bar{x} \mid \bar{y} = (x \mid x) \mid (y \mid y)$
   — enfin on exprime $\top$ comme $\neg\bot = ((x \mid x) \mid x) \mid ((x \mid x) \mid x)$

2. Montrons que l'ensemble $\{1, \Rightarrow\}$ est incomplet.

   Appelons stable pour 1, une fonction booléenne qui prend la valeur 1 quand tous ses arguments ont la valeur 1.

   Il est facile de voir que toute fonction booléenne définie avec les seules opérations $\{1, \Rightarrow\}$ est stable pour 1, car $1 \Rightarrow 1 \equiv 1$ (on peut le faire proprement par récurrence sur la taille de la formule).

   Or $\neg$ n'est pas stable pour 1, donc la fonction $f(x) = \neg x$ n'est pas exprimable.

   Par suite cet ensemble est incomplet.