Examen INF402 Introduction à la logique

L2 INM - MIN - MAT

Session 1 du 22 mai 2024
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices. Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formalisation (20 points))**.**

Dans le petit pays de Gödélie, en pleine guerre froide, les plus redoutables espions de la planète se retrouvent pour régler leurs comptes. Chaque espion a pour cible ***un*** *de ses « collègues », qu'il cherche à neutraliser par tous les moyens. Certains espions ont un* permis de tuer *certains autres. Enfin, certains espions ont prévu qu'il y aurait du grabuge et sont donc* armés.

Dans tout cet exercice, on utilisera obligatoirement les symboles suivants :

— $James$ *et* $Matahari$ *sont des espions.*
— $C(x)$ *désigne* la *cible de l'espion* x.
— $P(x, y)$ *signifie que «* x *a le permis de tuer* y *».*
— $A(x)$ *signifie que «* x *est armé ».*
— $M(x, y)$ *signifie que «* x *vient du même pays que* y *».*

1. *Précisez la signature* Σ *associée à ces six symboles.*
2. *Formalisez les énoncés suivants en logique du premier ordre :*
   (a) *James a le permis de tuer tous les espions.*
   (b) *Aucun espion n'a le permis de tuer un espion qui vient du même pays que lui.*
   (c) *Tout espion a le permis de tuer sa cible si et seulement celle-ci est armée.*
   (d) *Il y a deux espions qui sont la cible l'un de l'autre.*
   (e) *Il y a un espion qui a un permis de tuer mais qui n'est pas armé.*
   (f) *Chaque espion a soit le permis de tuer Matahari, soit n'a le permis de tuer personne.*

Réponse:

1. $\Sigma = \{James^{f0}, Matahari^{f0}, C^{f1}, P^{r2}, A^{r1}, M^{r2}\}$
2. (a) $\forall x P(James, x)$
   (b) $\forall x \forall y \big(M(x, y) \Rightarrow \neg P(x, y)\big)$ ou $\neg \exists x \exists y \big(M(x, y) \wedge P(x, y)\big)$
   (c) $\forall x \big(A(C(x)) \Leftrightarrow P(x, C(x))\big)$
   (d) $\exists x \exists y \big(C(x) = y \wedge C(y) = x\big)$
   (e) $\exists x \exists y \big(P(x, y) \wedge \neg A(x)\big)$
   (f) $\forall x \big(P(x, Matahari) \vee \forall y \neg P(x, y)\big)$

Barème :
— 2 points pour la signature
— 3 points pour chaque formule

$\square$

Exercice 2 (Expansions (20 points, exo du poly)).

À l'aide de la méthode des expansions, déterminez ***un contre-modèle*** *de chacune de ces formules :*

1. (10 points) $A = \forall x\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow \big(\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)\big)$
2. (10 points) $B = \forall x \forall y\big(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)\big) \Rightarrow \forall x R(x,x)$

Réponse:

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$
   La 1-expansion est clairement valide : $(P(0) \Rightarrow Q(0)) \Rightarrow (P(0) \Rightarrow Q(0))$.
   Construisons la 2-expansion de cette formule :
   $(P(0) \Rightarrow Q(0)) \wedge (P(1) \Rightarrow Q(1)) \Rightarrow (P(0) \vee P(1) \Rightarrow Q(0) \wedge Q(1))$
   Cette expansion vaut 0 pour l'assignation $P(0) = 1, P(1) = 0, Q(0) = 1, Q(1) = 0$, ce qui donne le contre-modèle I de domaine $\{0,1\}$ avec $P_I = \{0\}, Q_I = \{0\}$.
   Un autre contre-modèle est obtenu en échangeant les rôles de 0 et de 1 : $P_I = \{1\}, Q_I = \{1\}$.
2. $\forall x \forall y(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \Rightarrow \forall x R(x,x)$
   Construisons la 1-expansion de cette formule : $(R(0,0) \Rightarrow R(0,0)) \Rightarrow R(0,0)$.
   Cette expansion vaut 0 pour l'assignation $R(0,0) = 0$, ce qui donne le contre-modèle I de domaine $\{0\}$ avec $R_I = \{\}$.

Barème : 10 points pour chaque formule :
— sur 2 points : on veut voir la 1-expansion (valide) de la formule A, et on doit trouver un contre-modèle dès la 1-expansion de B.
— sur 5 points : l'expansion proprement dite.
— sur 3 points : le contre-modèle doit être explicitement donné, au moins sous forme "propositionnelle".
— si erreur d'expansion, le contre-modèle doit être cohérent avec l'expansion produite.

□

Exercice 3 (Unification (15 points)).

Pour chacune des équations suivantes, déterminez si elle admet une solution, et si oui déterminez un unificateur le plus général. Vous utiliserez l'algorithme du cours dont vous détaillerez les étapes avec les règles utilisées.

a est une constante ; f est une fonction ternaire et g est une fonction binaire.

1. (5 points) $f\big(x, y, g(a,a)\big) = f\big(g(y,y), z, z\big)$
2. (5 points) $f\big(x, y, a\big) = f\big(y, g(z,z), x\big)$
3. (5 points) $f\big(x, y, g(x,x)\big) = f\big(y, g(z,z), z\big)$

Réponse:

1. $f(x, y, g(a,a)) = f(g(y,y), z, z)$
   — Décomposition : $x = g(y,y)$; $y = z$; $g(a,a) = z$
   — Élimination de x : $x := g(y,y)$; $y = z$; $g(a,a) = z$
   — Élimination de y : $x := g(z,z)$; $y := z$; $g(a,a) = z$
   — Orientation : $x := g(z,z)$; $y := z$; $z = g(a,a)$
   — Élimination de z : $x := g(g(a,a), g(a,a))$; $y := g(a,a)$; $z := g(a,a)$
   ce qui donne l'unificateur le plus général.
2. $f(x, y, a) = f(y, g(z,z), x)$
   — Décomposition : $x = y$; $y = g(z,z)$; $a = x$
   — Élimination de x : $x := y$; $y = g(z,z)$; $a = y$
   — Élimination de y : $x := y$; $y := g(z,z)$; $a = g(z,z)$
   — Échec de décomposition dans $a = g(z,z)$
   Il n y a pas de mgu.
3. $f(x, y, g(x,x)) = f(y, g(z,z), z)$
   — Décomposition : $x = y$, $y = g(z,z)$, $g(x,x) = z$
   — Élimination de x : $x := y$, $y = g(z,z)$, $g(y,y) = z$
   — Élimination de y : $x := y$, $y := g(z,z)$, $g(g(z,z), g(z,z)) = z$
   Il y aura un échec d'éliminiation dans $z = g(g(z,z), g(z,z))$.

Barème :

— 5 points pour chaque équation
— -3 points à l'exercice si les règles ne sont pas étiquetées
— le mgu doit être explicité pour la 1ère équation
— les causes d'échecs doivent également être explicitées (décomposition ou élimination), sinon -2 points

□

Exercice 4 (Skolémisation (15 points))**.**
Soit $A = \forall x\Big(\big(\exists y P(x,y) \Rightarrow \exists x Q(x)\big) \wedge \exists y P(x,y) \wedge \neg\exists x Q(x)\Big)$.
Nous cherchons à démontrer que A *est insatisfaisable.*

1. (10 points) *Skolémisez* A *puis donnez sa forme clausale.*
2. (5 points) *Donnez un ensemble d'instances contradictoires des clauses obtenues et montrez la contradiction par résolution propositionnelle.*

Réponse: Skolémisation :

$$\forall x((\exists y P(x,y) \Rightarrow \exists x Q(x)) \wedge \exists y P(x,y) \wedge \neg\exists x Q(x))$$

Forme normale :

$$\forall x((\neg\exists y P(x,y) \vee \exists x Q(x)) \wedge \exists y P(x,y) \wedge \forall x \neg Q(x))$$

$$\forall x((\forall y \neg P(x,y) \vee \exists x Q(x)) \wedge \exists y P(x,y) \wedge \forall x \neg Q(x))$$

Forme propre :

$$\forall x((\forall y \neg P(x,y) \vee \exists z Q(z)) \wedge \exists u P(x,u) \wedge \forall v \neg Q(v))$$

Élimination des $\exists$:

$$\forall x((\forall y \neg P(x,y) \vee Q(a)) \wedge P(x,f(x)) \wedge \forall v \neg Q(v))$$

Forme de skolem :

$$(\neg P(x,y) \vee Q(a)) \wedge P(x,f(x)) \wedge \neg Q(v)$$

Forme clausale :
— $\overline{P(x,y)} + Q(a)$
— $P(x,f(x))$
— $\overline{Q(v)}$

Instances contradictoires : $\overline{P(a,f(a))} + Q(a)$, $P(a,f(a))$, $\overline{Q(a)}$

Preuve propositionnelle :

1. $\overline{P(a,f(a))} + Q(a)$
2. $P(a,f(a))$
3. $Q(a)$, résolvant 1,2
4. $\overline{Q(a)}$
5. $\perp$, résolvant 3,4

Barème :
— 2 points pour chaque étape de la mise en forme clausale
— 3 points pour le choix des instances
— 2 points pour la preuve

□

Exercice 5 (Résolution (15 points))**.**
Considérons l'ensemble suivant de clauses du premier ordre :

1. $\overline{R(x)} + Q(f(x))$
2. $\overline{Q(x)} + R(f(x))$
3. $P(f(x),x)$
4. $\overline{P(x,y)} + \overline{P(y,z)} + P(x,z)$
5. $Q(a)$
6. $\overline{P(y,a)} + \overline{Q(y)}$

Nous voulons montrer que cet ensemble de clauses est insatisfaisable par instanciation ou par résolution.
Au choix : *(vous n'obtiendrez pas le double de points en utilisant les deux méthodes)*

1. *Trouvez des instances contradictoires de ces clauses et montrez par résolution propositionnelle que ces instances sont contradictoires.*
   OU
2. *Donnez une preuve directe du caractère contradictoire par factorisation, copie et résolution binaire. Il est possible que toutes les règles ne soient pas utilisées.*

Réponse: La résolution binaire suffit :

7. $R(f(a))$ (RB 5,2, $x := a$)
8. $Q(f(f(a)))$ (RB 7,1, $x := f(a)$)
9. $\overline{P(f(f(a)), a)}$ (RB 8,6, $y := f(f(a))$)
10. $\overline{P(f(f(a)), y)} + \overline{P(y, a)}$ (RB 9,4, $x := f(f(a)), z := a$)
11. $\overline{P(f(a), a)}$ (RB 10,3, $x := f(a), y := f(a)$)
12. $\perp$ (RB 11,3, $x := a$)

On a utilisé 2 instances de la clause 3.
Barème :
— $\simeq$ 2 points par ligne de preuve (ou par instance pertinente)
— 3 points pour les justifications (parents des résolvants, unificateurs)
On donne des points pour un début de preuve non aboutie (en fonction du nombre de clauses pertinentes obtenues).
Si une clause est obtenue autrement que par résolution elle invalide la suite de la preuve.

□

Exercice 6 (Déduction naturelle (20 points))**.**
Démontrez les formules suivantes en déduction naturelle au premier ordre. Comme vu en cours et en TD, on numérotera les lignes de la preuve, et on indiquera pour chaque ligne la formule démontrée, le contexte, la règle appliquée et les prémisses utilisées.

1. $\forall x\Big(P(x) \Rightarrow \forall y\big(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y)\big)\Big)$
2. $\Big(\forall x\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \wedge \exists y P(y)\Big) \Rightarrow \exists z Q(z)$

Réponse:

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y)))$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $P(x)$	
1,2	2	`Supposons` $\neg P(y)$	
1,2,3	3	`Supposons` $x = y$	
1,2,3	4	$P(y)$	congruence 3,1
1,2,3	5	$\perp$	$\Rightarrow$E 2,4
1,2	6	`Donc` $\neg(x = y)$	$\Rightarrow$I 3,5
1	7	`Donc` $\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y)$	$\Rightarrow$I 2,6
1	8	$\forall y(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y))$	$\forall$I 7
	9	`Donc` $P(x) \Rightarrow \forall y(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y))$	$\Rightarrow$I 1,8
	10	$\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y(\neg P(y) \Rightarrow \neg(x = y)))$	$\forall$I 9

2. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists y P(y) \Rightarrow \exists z Q(z)$

1	1	**Sup** $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists y P(y)$	
1	2	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	$\wedge E$ 1
1	3	$\exists y P(y)$	$\wedge E$ 1
1,4	4	**Sup** $P(y)$	
1,4	5	$P(y) \Rightarrow Q(y)$	$\forall E$ 2, y
1,4	6	$Q(y)$	$\Rightarrow E$ 4,5
1,4	7	$\exists z Q(z)$	$\exists I$ 6, y
1	8	**Donc** $P(y) \Rightarrow \exists z Q(z)$	$\Rightarrow I$ 4,7
1	9	$\exists z Q(z)$	$\exists E$ 3, 8
	10	**Donc** $(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists y P(y)) \Rightarrow \exists z Q(z)$	$\Rightarrow I$ 1,9

Barème :
- Chaque preuve complète rapporte les points indiqués dans l'énoncé (10/10).
- Sinon, chacune des règles $\Rightarrow E$, $\Rightarrow I$, $\wedge E$, $\forall I$, $\forall E$, $\exists I$, $\exists E$, *congruence* utilisée correctement et à bon escient dans au moins une des preuves rapporte 2 points, et on peut donner quelques points en plus si l'idée d'une preuve correcte est présente.
  Attention à l'introduction du $\forall I$ au bon endroit et à la construction correcte d'une preuve par $\exists E$.

□

Exercice 7 (Démonstration par récurrence (15 points))**.**
Définition : Une formule F est sous forme prénexe si elle est de la forme $Q_1x_1 \dots Q_nx_nG$ où G est une formule sans quantificateur et tous les Q_i sont des quantificateurs $\forall$ ou $\exists$.
On appelle $Q_1x_1 \dots Q_nx_n$ le préfixe de F ; ce préfixe peut être vide.

1. (5 points) *Montrez que toute formule du premier ordre est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ et le quantificateur $\exists$.*
   Pour cela, vous montrerez comment exprimer les connecteurs $\wedge$ et $\Rightarrow$ ainsi que le quantificateur $\forall$ à l'aide de $\neg$, de $\vee$ et de $\exists$.
2. (10 points) *Montrez que toute formule du premier ordre est équivalente à une formule sous forme prénexe, par récurrence sur la taille de la formule.*
   D'après la question précédente, vous pouvez vous restreindre aux formules n'utilisant que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ et le quantificateur $\exists$.

Réponse:
- Montrer que toute formule est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs suivants $\neg$,$\vee$, et le quantificateur $\exists$.
  - $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$
  - $A \Rightarrow B = (\neg A \vee B)$
  - $\forall x A = \neg \exists x \neg A$

  Barème : 1 point pour $\Rightarrow$, 2 points chacun pour $\wedge$ et pour $\forall$. On se contentera de ces trois égalités, on n'attend pas de récurrence ici.
- Montrer que toute formule est équivalente à une formule sous forme prénexe.
  D'après la question précédente nous nous restreignons aux formules n'utilisant que les quantificateurs suivants $\neg$,$\vee$, et le quantificateur $\exists$.
  Récurrence sur la taille de la formule F
  - Cas de Base : Si F est une formule atomique : le résultat est immédiat.
  - — Si $F = \neg G$, par hypothèse de récurrence $G = Q_1x_1 \dots Q_nx_nG'$ donc $F = \neg Q_1x_1 \dots Q_nG' = Q_1'x_1 \dots Q_n'x_n\neg G'$ où Q_i' est le quantificateur dual de Q_i.
    - Si $F = G \vee H$ par hypothèse de récurrence $G = Q_1x_1 \dots Q_nx_nG'$ et $H = P_1y_1 \dots P_my_mH'$. Quitte à renommer on peut supposer $x_i \neq y_j$. Comme les formules G' et F' ne partagent pas de variables liées, F est équivalent à $Q_1x_1 \dots Q_nx_nP_1y_1 \dots P_my_m(G' \vee H')$
    - Si $F = \exists x G$ par hypothèse de récurrence $G = Q_1x_1 \dots Q_nx_nG'$ donc $F = \exists x Q_1x_1 \dots Q_nx_nG'$.

  Barème :
  - 1 point pour le cas de base
  - 2 points pour le cas de la négation
  - 3 points pour le cas du $\vee$
  - 2 points pour le cas du $\exists$
  - 2 points pour la rédaction

□