Partiel INF402

Stéphane Devismes   Benjamin Wack

12 mars 2020
2 pages
Total : 120 points (+ 10 de bonus)
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 120 points, le total des exercices est de 130 pour tenir compte de leur longueur.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Modèles et formes normales (20 points))
Soit $A = a \vee \neg b \Rightarrow (c \Leftrightarrow \neg a) \wedge b$.

1. *Réécrivez cette formule sous forme d'arbre. (1 point)*
2. *Déterminer une forme normale disjonctive de A et la simplifier le plus possible. (8 points)*
3. *Déterminer une forme normale conjonctive de A et la simplifier le plus possible. (8 points)*
4. *Si c'est possible, donner un modèle de A et justifier la réponse* sans utiliser de table de vérité. *(1,5 points)*
5. *Si c'est possible, donner un contre-modèle de A et justifier la réponse* sans utiliser de table de vérité. *(1,5 points)*

Réponse:
— Je donne A sous sa forme stricte : $((a \vee \neg b) \Rightarrow ((c \Leftrightarrow \neg a) \wedge b))$
— En forme normale disjonctive : $\neg a \wedge b \vee b \wedge \neg c$
  Ce qui donne deux modèles : $a = 0, b = 1$ et $b = 1, c = 0$.
— En forme normale conjonctive : $(\neg a \vee \neg c) \wedge b$
  Ce qui donne deux contre-modèles : $a = 1, c = 1$ et $b = 0$.

□

Exercice 2 (Formalisation (25 points))
En présipauté du Groland, *la nouvelle réforme des retraites est au coeur de toutes les discussions comme on peut le remarquer dans cet échange impromptu entre* Guigolaine Plutanfiard *et* Fifigrot Vichume, *entendu du côté de* Mufflins, *dans le* Groland de Côté.
— *Guigolaine dit : « Si on a au moins 62 ans, alors on peut partir en retraite »*
— *Fifigrot rétorque : « On peut partir en retraite si et seulement si on a au moins 62 ans et ses annuités ou qu'on a atteint l'âge pivot »*
— *Guigolaine renchérit : « Si on a atteint l'âge pivot, alors on a au moins 62 ans »*
— *Fifigrot conclut alors : « Donc, si on a ses annuités mais pas au moins 62 ans, alors on ne peut pas partir en retraite »*

Vous devez maintenant démontrer que Fifigrot a raison de conclure ainsi en suivant la méthode ci-dessous.

1. *Formaliser les trois affirmations et la conclusion. (10 points)*
   Pour cela, vous utiliserez les variables propositionnelles suivantes :
   — M *signifie « avoir au moins 62 ans »,*
   — R *signifie « pouvoir partir en retraite »,*
   — A *signifie « avoir ses annuités »et*
   — P *signifie « avoir atteint l'âge pivot »*

2. *Transformer chacune des trois premières affirmations ainsi que la négation de la conclusion en un ensemble de clauses équivalentes. (10 points)*
3. *Démontrer,* **par résolution***, que la conclusion de Fifigrot se déduit des trois affirmations. (5 points)*

Réponse:

— Guiguolaine dit : « Si on a au moins 62 ans, alors on peut partir en retraite »

$$M \Rightarrow R$$

Ce qui donne la clause

$$\bar{M} + R$$

— Fifigrot rétorque : « On peut partir en retraite si et seulement si on a au moins 62 ans et ses annuités ou qu'on a atteint l'âge pivot »

$$R \Leftrightarrow M \wedge A \vee P$$

Ce qui donne les clauses

$$R + \bar{M} + \bar{A}, R + \bar{P}, \bar{R} + A + P, \bar{R} + M + P$$

— Guigolaine renchérit : « Si on a atteint l'âge pivot, alors on a au moins 62 ans »

$$P \Rightarrow M$$

Ce qui donne la clause

$$\bar{P} + M$$

— Fifigrot conclut alors : « Donc, si on a ses annuités mais pas au moins 62 ans, alors on ne peut pas partir en retraite »

$$A \wedge \neg M \Rightarrow \neg R$$

La négation de cette conclusion donne les clauses suivantes :

$$A, \bar{M}, R$$

D'où la preuve par résolution

```
1 -M     hyp
2 -P+M   hyp
3 -P     res 1,2
4 -R+M+P hyp
5 -R+P   res 1,4
6 -R     res 3,5
7 R      hyp
8 Faux   res 6,7
```

□

Exercice 3 (Résolution (20 points))
On considère les formules suivantes :

$$\{\ a \Leftrightarrow b,\ \ b \Leftrightarrow c,\ \ \neg(a \Leftrightarrow c)\ \}$$

Transformer ces formules en un ensemble de clauses équivalentes, puis démontrer par résolution propositionnelle que cet ensemble de clauses est insatisfaisable.

Réponse: Les clauses sont

$$\{\ \bar{a} + b, \bar{b} + a, \bar{b} + c, \bar{c} + b, a + c, \bar{a} + \bar{c}\ \}$$

La preuve :

1. $\bar{a} + b$ Hyp 1
2. $\bar{b} + c$ Hyp 3
3. $\bar{a} + c$ Res 1,2
4. $a + c$ Hyp 5
5. c Res 3,4
6. $\bar{c} + b$ Hyp 4
7. b Res 5,6
8. $\bar{b} + a$ Hyp 2
9. a Res 7,8
10. $\bar{a} + \bar{c}$ Hyp 6
11. $\bar{c}$ Res 9,10
12. $\perp$ Res 5,11

□

Exercice 4 (DPLL (25 points), Exo du Poly)
Appliquer l'algorithme `DPLL` *sur chacun des ensembles de clauses suivants. Vous donnerez la trace de l'algorithme sous forme arborescente en étiquetant clairement chaque étape par la règle utilisée et les assignations qui en découlent. Vous interpréterez clairement les résultats obtenus lorsque l'algorithme se termine et vous donnerez un modèle le cas échéant.*

1. $\{\ a+b+c+d+e+f,\ \overline{a}+b,\ \overline{b}+a,\ \overline{c}+d,\ \overline{d}+c,\ \overline{b}+\overline{c},\ \overline{b}+c,\ b+\overline{c},\ \overline{e},\ \overline{f}\ \}$ *(15 points)*

2. $\{\ a+\overline{c}+d,\ \overline{b}+c+f,\ b+\overline{e}+f,\ \overline{c}+e+\overline{f},\ e+f,\ c+d,\ \overline{a},\ \overline{e}+\overline{f}\ \}$ *(10 points)*

Réponse:

1. Nous choisissons la variable a comme pivot, nous aurions pu choisir une autre variable comme b ou c mais la trace serait différente de celle-ci.

$$a+b+c+d+e+f,\overline{a}+b,\overline{b}+a,\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{b}+\overline{c},\overline{b}+c,b+\overline{c},\overline{e},\overline{f}$$
$$\Big\downarrow \text{RU } e=0,\ f=0$$
$$a+b+c+d,\overline{a}+b,\overline{b}+a,\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{b}+\overline{c},\overline{b}+c,b+\overline{c}$$

Branche $a=0$:

$$\Big\downarrow a=0$$
$$b+c+d,\overline{b},\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{b}+\overline{c},\overline{b}+c,b+\overline{c}$$
$$\Big\downarrow \text{RE}$$
$$b+c+d,\overline{b},\overline{c}+d,\overline{d}+c,b+\overline{c}$$
$$\Big\downarrow \text{RU } b=0$$
$$c+d,\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{c}$$
$$\Big\downarrow \text{RU } c=0$$
$$d,\overline{d}$$
$$\Big\downarrow \text{RU}$$
$$\perp$$

Branche $a=1$:

$$\Big\downarrow a=1$$
$$b,\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{b}+\overline{c},\overline{b}+c,b+\overline{c}$$
$$\Big\downarrow \text{RE}$$
$$b,\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{b}+\overline{c},\overline{b}+c$$
$$\Big\downarrow \text{RU } b=1$$
$$\overline{c}+d,\overline{d}+c,\overline{c},c$$
$$\Big\downarrow \text{RU}$$
$$\perp$$

2. Nous choisissons la variable e.

$$
\begin{tikzcd}
 & a+\overline{c}+d, \overline{b}+c+f, b+\overline{e}+f, \overline{c}+e+\overline{f}, e+f, c+d, \overline{a}, \overline{e}+\overline{f} \arrow[d, "\text{ELI } d=1"'] & \\
 & \overline{b}+c+f, b+\overline{e}+f, \overline{c}+e+\overline{f}, e+f, \overline{a}, \overline{e}+\overline{f} \arrow[d, "\text{ELI } a=0"'] & \\
 & \overline{b}+c+f, b+\overline{e}+f, \overline{c}+e+\overline{f}, e+f, \overline{e}+\overline{f} \arrow[dl, "e=0"'] \arrow[dr, "e=1"] & \\
\overline{b}+c+f, \overline{c}+\overline{f}, f \arrow[d, "\text{RU } f=1"'] & & \overline{b}+c+f, b+f, \overline{f} \\
\overline{c} \arrow[d, "\text{ELI } c=0"'] & & \\
\emptyset & &
\end{tikzcd}
$$

On trouve un modèle : $d = 1, a = 0, e = 0, f = 1, c = 0$. L'autre branche donne un autre modèle.

□

Exercice 5 (Déduction naturelle (25 points))
Prouver, **par déduction naturelle**, *les formules suivantes. Vous présenterez vos preuves sous forme de tableaux.*

1. $\neg p \wedge q \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow p$ *(10 points)*
2. $(\neg c \Rightarrow a \vee b) \wedge \neg a \Rightarrow c \vee b$ *(15 points)*

Réponse:

1. $\wedge E$, $\Rightarrow E$, Efq, $\Rightarrow I$ (basique)
2. $(\neg c \Rightarrow a \vee b) \wedge \neg a \Rightarrow c \vee b$

```
Supposons (-c => a+b) & -a
-c => a+b
-a
supposons -(c+b)
supposons -c
supposons -b
a+b
F (elim ou)
Donc --b
b
c+b
F
Donc --c
c
c+b
F
Donc --(c+b)
c+b
(-c => a+b) & -a => c+b
```

□

Exercice 6 (Démonstration par récurrence (15 points))
Soit n un entier positif non nul. Soient $A_1, A_2, \dots A_n$ et B des formules propositionnelles.

On s'intéresse à la formule $\neg(A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow B)$.

1. *Rappeler quelle est la formule stricte (parenthésée) correspondant à cette formule.* *(1 point)*
2. *Démontrer que, pour tout* $n \geqslant 1$, *on a* $\neg(A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B) \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$. *(14 points)*

Réponse:

1. $\neg(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (A_n \Rightarrow B))))$
2. Par récurrence (directe) sur n :
   — Pour $n = 1$ on a effectivement $\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg(\neg A \vee B) \equiv A \wedge \neg B$.
   — Supposons $n > 1$ et la propriété vraie pour $n - 1$. Alors :

$$\neg(A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B) \quad \equiv \quad A_1 \wedge \neg(A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B) \quad \text{(comme pour } n = 1\text{)}$$

or la formule $A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$ satisfait la propriété au rang $n - 1$:

$$\equiv \quad A_1 \wedge (A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B) \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

□