Partiel INF452

Stéphane Devismes Benjamin Wack

10 mars 2021
2 pages
Total : 120 points + 5 points de bonus
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 120 points + 5 points de bonus.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Modèles et formes normales (20 points))
Soit $A = a \land d \Rightarrow b \land c \Leftrightarrow \neg c \Rightarrow \neg d \land a$.

1. *Réécrivez cette formule sous forme d'arbre.* *(1 point)*
2. *Déterminer une forme normale disjonctive de* A *et la simplifier le plus possible.* *(8 points)*
3. *Déterminer une forme normale conjonctive de* A *et la simplifier le plus possible.* *(8 points)*
4. *Si c'est possible, donner un modèle de* A *et justifier la réponse* sans utiliser de table de vérité. *(1,5 points)*
5. *Si c'est possible, donner un contre-modèle de* A *et justifier la réponse* sans utiliser de table de vérité. *(1,5 points)*

Réponse:
- Je donne A sous sa forme stricte : $(((a \land d) \Rightarrow (b \land c)) \Leftrightarrow (\neg c \Rightarrow (\neg d \land a)))$.
- En forme normale disjonctive : $a \land \neg d \lor a \land b \lor a \land \neg c \lor \neg a \land c$
  Ce qui donne quatre modèles : (1) $a = 1, d = 0$, (2) $a = 1, b = 1$, (3) $a = 1, c = 0$ et (4) $a = 0$ et $c = 1$.
- En forme normale conjonctive : $(\neg a \lor b \lor \neg c \lor \neg d) \land (a \lor c)$
  Ce qui donne deux contre-modèles : (1) $a = 1, b = 0, c = 1, d = 1$ et (2) $a = 0, c = 0$.

□

Exercice 2 (Formalisation (25 points))

Nous retournons sur l'île des Purs et des Pires[1]*. Rappelons que les Purs disent toujours la vérité tandis que les Pires mentent toujours.*

Nous rencontrons cette fois trois indigènes, Aha, Bébé et Sissi. Nous savons que l'un d'entre eux est Pur alors que les deux autres sont Pires. Ils affirment :

Aha : *« Il n'y a aucun danger sur cette île. »*

Bébé : *« Aha est Pur. »*

Sissi : *« Bébé est Pire. »*

Peut-on en conclure que l'île est dangereuse ?

1. *Formaliser les trois affirmations, la conclusion, et le fait qu'il y a un Pur et deux Pires. (10 points)*
   Pour cela, vous utiliserez les variables propositionnelles suivantes :
   - A *: Aha est Pur.*
   - B *: Bébé est Pur.*
   - C *: Sissi est Pur.*

1. Cette énigme est librement inspirée d'un problème de Jean-Claude Baillif et réutilise les personnages de Raymond Smullyan.

— *D : L'île est dangereuse.*

2. *Transformer chacune des trois affirmations, le fait qu'il y a un Pur et deux Pires, ainsi que la négation de la conclusion en un ensemble de clauses équivalentes. (10 points)*
3. *Démontrer,* **par résolution***, que la conclusion se déduit des trois affirmations. (5 points)*

Réponse:

1. **Affirmation de Aha :** $A \Leftrightarrow \neg D$

   Affirmation de Bébé : $B \Leftrightarrow A$

   Affirmation de Sissi : $C \Leftrightarrow \neg B$

   Conclusion : D

   Tribus des personnages : par exemple $A \wedge \neg B \wedge \neg C + \neg A \wedge \neg B \wedge C + \neg A \wedge B \wedge \neg C$
2. Clauses :
   — $\bar{A} + \bar{D}$, $A + D$
   — $\bar{B} + A$, $\bar{A} + B$
   — $\bar{B} + \bar{C}$, $B + C$
   — $\bar{D}$
   — $A + B + C$, $\bar{A} + \bar{B}$, $\bar{B} + \bar{C}$, $\bar{A} + \bar{C}$
3. On n'utilise en fait que très peu de clauses, et Sissi ne nous apprend rien :

```
1 -D     hyp
2 A+D    hyp
3 A      res 1,2
4 -A+B   hyp
5 -A+-B  hyp
6 -A     res 4,5
7 Faux   res 3,6
```

□

Exercice 3 (Résolution (Exo du Poly, 20 points))

Les ensembles de formules suivants sont insatisfaisables.

— $\{a + b, \overline{a} + c, \overline{a} + \overline{d}, d + \overline{c}, \overline{b} + a\}$.
— $\{a + b + c, \overline{a} + b, \overline{b} + c, \overline{c} + a, \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\}$.

En donner une preuve par résolution.

Réponse:

— Soit l'ensemble de clauses : $\{a + b, \overline{a} + c, \overline{a} + \overline{d}, d + \overline{c}, \overline{b} + a\}$. Nous suggérons une tactique pour obtenir une preuve : construire en priorité les résolvants ayant le moins de littéraux possibles.

1	$a + b$	Hyp
2	$\overline{b} + a$	Hyp
3	a	Résolvant de 1, 2
4	$\overline{a} + c$	Hyp
5	c	Résolvant de 3, 4
6	$\overline{a} + \overline{d}$	Hyp
7	$\overline{d}$	Résolvant de 3, 6
8	$d + \overline{c}$	Hyp
9	d	Résolvant de 5, 8
10	$\perp$	Résolvant de 7,9

— Soit l'ensemble de clauses : $\{a + b + c, \overline{a} + b, \overline{b} + c, \overline{c} + a, \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\}$. Nous utilisons la même tactique pour obtenir une preuve.

1	$a+b+c$	Hyp
2	$\overline{a}+b$	Hyp
3	$b+c$	Résolvant de 1,2
4	$\overline{c}+a$	Hyp
5	$b+\overline{c}$	Résolvant de 2, 4
6	b	Résolvant de 3, 5
7	$\overline{b}+c$	Hyp
8	c	Résolvant de 6, 7
9	a	Résolvant de 4, 8
10	$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$	Hyp
11	$\overline{b}+\overline{c}$	9, 10
12	$\overline{c}$	Résolvant de 6, 11
13	$\perp$	Résolvant de 8, 12

□

Exercice 4 (DPLL (20 points))
Appliquer l'algorithme DPLL *sur chacun des ensembles de clauses suivants. Vous donnerez la trace de l'algorithme sous forme arborescente en étiquetant clairement chaque étape par la règle utilisée et les assignations qui en découlent. Vous interpréterez clairement les résultats obtenus lorsque l'algorithme se termine et vous donnerez un modèle le cas échéant.*

1. $\{a+\overline{b}+c,\ \overline{a}+b,\ \overline{a}+\overline{c},\ a+\overline{c}+\overline{d},\ \overline{a}+c+\overline{d},\ a,\ \overline{c},\ \overline{b}+d\}$ *(5 points)*
2. $\{a+b+c+\overline{d}+\overline{e}+\overline{f},\ \overline{b}+c,\ a+c+d+f,\ \overline{a}+\overline{d}+\overline{e},\ \overline{b}+\overline{c}+\overline{f},\ \overline{b}+\overline{d}+e,\ b+\overline{c},\ b+\overline{c}+\overline{d},\ b+c+d,\ b+\overline{d},\ b+e,\ \overline{f}\}$ *(15 points)*

Réponse:

1.
```
a+-b+c, -a+b, -a+-c, a+-c+-d, -a+c+-d, a, -c, -b+d

RE

-a+b, -a+c+-d, a, -c, -b+d

RU a=1, c=0

b, -d, -b+d

RU b=1, d=0

Faux
```

2.
```
a+b+c+-d+-e+-f, -b+c, a+c+d+f, -a+-d+-e, -b+-c+-f, -b+-d+e,
b+-c, b+-c+-d, b+c+d, b+-d, b+e, -f

RE

-b+c, a+c+d+f, -a+-d+-e, -b+-d+e, b+-c, b+c+d, b+-d, b+e, -f

RU f=0

-b+c, a+c+d, -a+-d+-e, -b+-d+e, b+-c, b+c+d, b+-d, b+e

Branchement sur b

1) b=0

a+c+d, -a+-d+-e, -c, c+d, -d, e
```

```
RE

-c, c+d, -d, e

ELI e=1

-c, c+d, -d

RU c=0, d=0

FAUX

2) b=1

c, a+c+d, -a+-d+-e, -d+e

RE

c, -a+-d+-e, -d+e

ELI c=1

-a+-d+-e, -d+e

ELI a=0

-d+e

ELI d=0

Vrai
```

D'où, le modèle $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0, f = 0$.

□

Exercice 5 (Déduction naturelle (25 points))
Prouver, **par déduction naturelle**, *les formules suivantes. Vous présenterez vos preuves sous forme de tableaux.*

1. $(C \Rightarrow \neg B) \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$ *(10 points)*
2. $A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow A \wedge B$ *(10 points)*
3. $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ *(5 points)*

Réponse:

1. $(C \Rightarrow \neg B) \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$

```
assume (c => -b) & (a => b).
  assume c.
    assume a.
      c => -b.
      a => b.
      -b.
      b.
      F.
    therefore -a.
  therefore c => -a.
therefore (c => -b) & (a => b) => c => -a.
```

2. $A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow A \wedge B$

```
assume a & (-a + b).
  a.
  -a + b.
  assume -a.
    F.
    a & b.
  therefore -a => a & b.
  assume b.
    a & b.
  therefore b => a & b.
  a & b.
therefore a & (-a + b) => a & b.
```

3. $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

```
assume -a => -b.
  assume b.
    assume -a.
      -b.
      F.
    therefore --a.
    a.
  therefore b => a.
therefore (-a => -b) => b => a.
```

□

Exercice 6 (Démonstration par récurrence (15 points))

Dans tout cet exercice on note $\oplus$ l'opérateur « ou exclusif », dont nous rappelons la table de vérité :

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

— *Démontrer que le connecteur $\oplus$ est associatif, autrement dit que $(x \oplus y) \oplus z \equiv x \oplus (y \oplus z)$.*

— *Soient maintenant n variables* différentes $x_1 \dots x_n$.
Démontrer par récurrence que pour toute assignation v, on a $[x_1 \oplus x_2 \dots \oplus x_n]_v = 1$ si et seulement si le nombre de ces variables valant 1 dans v est impair.

Réponse:

— Par les tables de vérité, il apparaît clairement que les modèles de ces deux formules sont les mêmes : les assignations dans lesquelles une seule ou les trois variables valent 1.

— **Cas de base :** Si $n = 1$, on a une seule variable et la propriété est trivialement vérifiée. On peut aussi commencer à $n = 2$ sans difficulté.

Hypothèse de récurrence : Supposons que pour $n \geq 1$, on a $[x_1 \oplus \dots \oplus x_n]_v = 1$ si et seulement si le nombre de $[x_i]_v$ (i allant de 1 à n) valant 1 est impair.

Pas de récurrence Considérons $n + 1$ variables différentes : $x_1 \dots x_{n+1}$.

On a 4 cas a étudier :

1. $[x_1 \oplus \dots \oplus x_n]_v = 0$ et $[x_{n+1}]_v = 0$. Dans ce cas, $[x_1 \oplus \dots \oplus x_{n+1}]_v = 0 \oplus 0 = 0$. Or, par hypothèse de récurrence, le nombre de $[x_i]_v$ (i allant de 1 à n) valant 1 est pair, ce qui reste vrai pour i de 1 à $n+1$ puisque $[x_{n+1}]_v = 0$.
2. $[x_1 \oplus \dots \oplus x_n]_v = 0$ et $[x_{n+1}]_v = 1$. Dans ce cas, $[x_1 \oplus \dots \oplus x_{n+1}]_v = 0 \oplus 1 = 1$. Or, par hypothèse de récurrence, le nombre de $[x_i]_v$ (i allant de 1 à n) valant 1 est pair, et donc il devient impair pour i de 1 à $n+1$.

3. $[x_1 \oplus \ldots \oplus x_n]_v = 1$ et $[x_{n+1}]_v = 0$. Dans ce cas, $[x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n+1}]_v = 1 \oplus 0 = 1$. Or, par hypothèse de récurrence, le nombre de $[x_i]_v$ (i allant de 1 à n) valant 1 est impair, ce qui reste vrai pour i de 1 à $n+1$.
4. $[x_1 \oplus \ldots \oplus x_n]_v = 1$ et $[x_{n+1}]_v = 1$. Dans ce cas, $[x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n+1}]_v = 1 \oplus 1 = 0$. Or, par hypothèse de récurrence, le nombre de $[x_i]_v$ (i allant de 1 à n) valant 1 est impair, et donc il devient pair pour i de 1 à $n+1$.

$\square$