Partiel INF402

Eskandar Kouicem Benjamin Wack

14 mars 2022
2 pages
Total : 120 points + 5 points de bonus
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 120 points + 5 points de bonus.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Modèles et formes normales (25 points))
Soit $A = a \vee \neg c \Leftrightarrow d \Rightarrow b \wedge d \vee \neg a \Rightarrow b$.

1. *Réécrivez cette formule sous forme d'arbre.* *(3 points)*
2. *Déterminer une forme normale disjonctive de A et la simplifier le plus possible.* *(9 points)*
3. *Déterminer une forme normale conjonctive de A et la simplifier le plus possible.* *(9 points)*
4. *Si c'est possible, donner un modèle de A et justifier la réponse* sans utiliser de table de vérité. *(2 points)*
5. *Si c'est possible, donner un contre-modèle de A et justifier la réponse* sans utiliser de table de vérité. *(2 points)*

Réponse:
- Je donne A sous sa forme stricte : $(a \vee \neg c) \Leftrightarrow (d \Rightarrow (((b \wedge d) \vee \neg a) \Rightarrow b))$.
- En forme normale disjonctive : $a + c.d.\bar{b} + \bar{c}.\bar{d} + \bar{c}.b$
  Ce qui donne 4 modèles : (1) $a = 0$, (2) $b = 0, c = d = 1$, (3) $c = d = 0$, (4) $b = 1, c = 0$.
- En forme normale conjonctive : $(a + \bar{c} + d).(a + \bar{c} + \bar{b}).(a + c + \bar{d} + b)$
  Ce qui donne 3 contre-modèles : (1) $a = d = 0, c = 1$, (2) $a = 0, b = c = 0$, (3) $a = b = c = 0, d = 1$.

□

Exercice 2 (Formalisation (Exo du poly, 15 points))
Formaliser les énoncés suivants en logique propositionnelle :

(a) *Si Pierre est rentré chez lui, alors Jean est allé au cinéma.*
(b) *Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.*
(c) *Si Jean est allé au cinéma, alors Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.*
(d) *Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma.*
(e) *Pierre est rentré chez lui.*

À l'aide d'une des méthodes vues en cours (au choix), déterminer si le dernier énoncé (e) est conséquence des énoncés (a) (b) (c) et (d).
Réponse: Les faits, Pierre est rentré chez lui, Jean est allé au cinéma, Marie est à la bibliothèque sont dénotés respectivement par les variables p, j, m. Les hypothèses sont formalisées par les formules :

1. $p \Rightarrow j$.
2. $m \vee p$.
3. $j \Rightarrow m \vee p$.

4. $\neg m \wedge j$.

Et la conclusion par p.

En utilisant les équivalences remarquables, nous prouvons que $(p \Rightarrow j) \wedge (m \vee p) \wedge (j \Rightarrow m \vee p) \wedge (\neg m \wedge j) \wedge \neg p$ est contradictoire. Car en enlevant les implications nous avons :

$$(\neg p \vee j) \wedge (m \vee p) \wedge (\neg j \vee m \vee p) \wedge \neg m \wedge j \wedge \neg p.$$

En utilisant $(x \vee \neg y) \wedge y = x \wedge y$, entre la seconde et la quatrième clause nous obtenons :

$$(\neg p \vee j) \wedge p \wedge (\neg j \vee m \vee p) \wedge \neg m \wedge j \wedge \neg p.$$

Nous obtenons une contradiction entre p et $\neg p$. Et donc le raisonnement est correct.

$\square$

Exercice 3 (Résolution (20 points))
Montrez **par résolution** *que les ensembles de formules suivants sont insatisfaisables :*

1. $\{a + \bar{c}, c, \bar{a} + b + \bar{d} + e, b + d, e + \bar{b}, f + g, \bar{g} + f, \bar{f} + \bar{e}\}$ *(10 points)*
2. $\{\bar{q} + m, \bar{q} + \bar{m} + \bar{r}, \bar{q} + \bar{m} + r, \bar{p} + r, \bar{p} + \bar{r}, p + q\}$ *(10 points)*

Réponse:

1	$a + \bar{c}$	Hyp
2	c	Hyp
3	a	Résolvant de 1, 2
4	$\bar{a} + b + \bar{d} + e$	Hyp
5	$b + \bar{d} + e$	Résolvant de 3, 4
6	$b + d$	Hyp
7	$b + e$	Résolvant de 5, 6
8	$e + \bar{b}$	Hyp
9	e	Résolvant 7,8
10	$f + g$	Hyp
11	$\bar{g} + f$	Hyp
12	f	Résolvant de 10,11
13	$\bar{f} + \bar{e}$	Hyp
14	$\bar{e}$	Résolvant de 12,13
15	$\perp$	Résolvant de 9,14

1	$\bar{q} + \bar{m} + \bar{r}$	Hyp
2	$\bar{q} + \bar{m} + r$	Hyp
3	$\bar{q} + \bar{m}$	Résolvant de 1, 2
4	$\bar{q} + m$	Hyp
5	$\bar{q}$	Résolvant de 3, 4
6	$p + q$	Hyp
7	p	Résolvant de 5, 6
8	$\bar{p} + r$	Hyp
9	$\bar{p} + \bar{r}$	Hyp
10	$\bar{p}$	Résolvant de 8,9
11	$\perp$	Résolvant de 7,10

$\square$

Exercice 4 (DPLL (20 points))
Déterminez **en appliquant l'algorithme DPLL** *si les ensembles de clauses suivants sont satisfaisables. Le cas échéant, vous donnerez le modèle exhibé par DPLL.*
Vous donnerez une trace complète du déroulement de l'algorithme étiquetée par les règles utilisées.

1. $\{a+b+c+d+f, \overline{a}+b, \overline{b}+a, \overline{c}+d, \overline{d}+c\}$. *(10 points)*
2. $\{p+q+\bar{r},\ r+q+\bar{p},\ p+r+q,\ r+q,\ q+p,\ \bar{p}+\bar{q},\ \bar{q}+p,\ q+s,\ \bar{s}+\bar{p}\}$ *(10 points)*

Réponse:

1.

$$\begin{tikzcd}
 & & a+b+c+d+f, \overline{a}+b, \overline{b}+a, \overline{c}+d, \overline{d}+c \arrow[d, "\text{ELI } f=1"'] & \\
 & & \overline{a}+b, \overline{b}+a, \overline{c}+d, \overline{d}+c \arrow[dl, "a=0"'] \arrow[dr, "a=1"] & \\
 & \overline{b}, \overline{c}+d, \overline{d}+c \arrow[d, "\text{ELI } b=0"'] & & b, \overline{c}+d, \overline{d}+c \\
 & \overline{c}+d, \overline{d}+c \arrow[dl, "c=0"'] \arrow[dr, "c=1"] & & \\
\overline{d} \arrow[d, "\text{ELI } d=0"'] & & d & \\
\emptyset & & &
\end{tikzcd}$$

D'après la trace ci-dessus, l'ensemble est satisfaisable. Nous observerons que, d'après le sens de « ou alors », l'algorithme se termine sur la première feuille, où la valeur vrai est retourné. Un modèle est donc $d=0$, $c=1$, $b=0$, $a=0$, et $f=1$.

2.

$$\begin{tikzcd}
 & p+q+\bar{r}, r+q+\bar{p}, p+r+q, r+q, q+p, \bar{p}+\bar{q}, \bar{q}+p, q+s, \bar{s}+\bar{p} \arrow[d, "RED"] & \\
 & r+q, q+p, \bar{p}+\bar{q}, \bar{q}+p, q+s, \bar{s}+\bar{p} \arrow[d, "\text{ELI } r=1"] & \\
 & q+p, \bar{p}+\bar{q}, \bar{q}+p, q+s, \bar{s}+\bar{p} \arrow[dl, "p=0"'] \arrow[dr, "p=1"] & \\
q, \bar{q}, q+s \arrow[d, "RU"'] & & \bar{q}, q+s, \bar{s} \arrow[d, "RU"] \\
\bot & & \bot
\end{tikzcd}$$

□

Exercice 5 (Déduction naturelle (25 points))
Prouver, **par déduction naturelle**, *les formules suivantes.*

Chaque formule de la preuve devra être justifiée ; il vous est recommandé de présenter vos preuves sous forme de tableaux comme vu en cours.

1. $((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *(5 points)*
2. $(p \Rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow \bot$ *(10 points)*
3. $p \Rightarrow (\neg p \vee q) \Rightarrow q$ *(10 points)*

Réponse:

1. $((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

```
1    assume (p + q) => r.
2      assume p.
3        p + q.                                        +I1 2
4        r.                                            =>E 1,3
5      therefore p => r.                               =>I 2,4
6    therefore ((p + q) => r) => (p => r).             =>I 1,5
```

2. $(p \Rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow \bot$

```
1    assume (p => -p) & (-p => p).
2      p => -p.                                        &E1 1
3      -p => p.                                        &E2 1
4      assume p.
5        -p.                                           =>E 2,4
6        F.                                            =>E 5,4
7      therefore -p.                                   =>I 4,6
8      p.                                              =>E 3,7
9      F.                                              =>E 7,8
10   therefore (p => -p) & (-p => p) => F.             =>I 1,9
```

3. $p \Rightarrow (\neg p \vee q) \Rightarrow q$

```
1    assume p.
2      assume -p + q.
3        assume -p.
4          F.                                          =>E 3,1
5          q.                                          Efq 4
6        therefore -p => q.                            =>I 3,5
7        assume q.
8        therefore q => q.                             =>I 7,7
9        q.                                            +E 2,6,8
10     therefore -p + q => q.                          =>I 2,9
11   therefore p => -p + q => q.                       =>I 1,10
```

□

Exercice 6 (Démonstration par récurrence (20 points))
Démontrer que toute formule stricte construite uniquement avec :

— *la constante* $\top$*,*
— *la variable propositionnelle* x*,*
— *les connecteurs* $\Rightarrow$ *et* $\vee$*,*
— *et les parenthèses*

est équivalente soit à x *soit à* $\top$*.*

Réponse: Par récurrence sur la taille de la formule.

Une formule de taille 0 est nécessairement une variable ou une constante, donc en l'occurrence x ou $\top$.

Soit un entier $n > 0$, supposons la propriété vraie pour toute formule de taille strictement inférieure à n. Soit alors A une formule de taille n de la forme décrite dans l'énoncé. A est forcément de la forme $B \Rightarrow C$ ou bien $B \vee C$, où B et C sont des formules de taille strictement inférieure à n, toutes deux construites comme A.

Par hypothèse de récurrence, B et C sont toutes deux équivalentes à x ou $\top$, on est donc ramené à étudier 8 cas :

— $A \equiv x \Rightarrow x \equiv \top$
— $A \equiv x \Rightarrow \top \equiv \top$
— $A \equiv \top \Rightarrow x \equiv x$
— $A \equiv \top \Rightarrow \top \equiv \top$
— $A \equiv x \vee x \equiv x$
— $A \equiv \top \vee x \equiv \top$ et de même pour $x \vee \top$ et $\top \vee \top$

□