Partiel INF402

Frédéric Prost Benjamin Wack

16 mars 2023
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices. L'épreuve sera notée sur 120 points.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formalisation (20 points))

Considérons le raisonnement suivant.

— *Dieu est omnibienveillant.*
— *Si la causalité était transitive, on en déduirait que : si Dieu est la cause de l'existence de l'humanité, il s'ensuit que Dieu a causé le changement climatique si c'est l'existence de l'humanité qui l'a causé.*
— *Or, tout bon scientifique doit admettre que c'est l'activité humaine qui a causé les problèmes de climat actuels.*
— *Mais bien que tout bon croyant sache que Dieu a créé l'humanité, un Dieu responsable du changement climatique global ne peut pas être omnibienveillant.*
— *On en déduit que la causalité est non-transitive.*

1. *Formalisez ce raisonnement en logique propositionnelle, en reformulant les affirmations si nécessaire. Ne perdez pas de temps à comprendre les affirmations, concentrez-vous sur les connecteurs logiques.*
2. *Trouvez une assignation qui satisfait les hypothèses.*
3. *Que pouvez-vous en conclure à propos de ce raisonnement ?*

Réponse:

On définit les variables propositionnelles :

P1 :	Dieu est omnibénévolent.
P2 :	Dieu a causé l'existence de l'humanité.
P3 :	Dieu a causé le changement climatique.
Q :	La causalité est transitive.
R :	L'humanité est la cause du changement climatique.

Le raisonnement se traduit par les formules :

$$\begin{array}{l} P1 \\ Q \implies (P2 \implies (R \implies P3)) \\ R \\ P2 \wedge (P3 \implies \neg P1) \\ \models \neg Q \end{array}$$

L'assignation suivante :

P1 :	$\top$
P2 :	$\top$
P3 :	$\perp$
Q :	$\perp$
R :	$\top$.

est le seul modèle des hypothèses.
Comme c'est aussi un modèle de $\neg Q$, le raisonnement est correct.

$\square$

Exercice 2 (Tables de vérité et formes normales (20 points))
Soit $A = \neg x \Rightarrow y \vee z \Rightarrow \neg(z \wedge y) \Rightarrow x$.

1. *Réécrivez cette formule sous forme d'arbre. (3 points)*
2. *Construisez la table de vérité de A. (5 points)*
3. *Déterminez une forme normale disjonctive de A et simplifiez-la le plus possible. (5 points)*
4. *Déterminez une forme normale conjonctive de A et simplifiez-la le plus possible. (5 points)*
5. *Donnez un modèle et un contre-modèle de A. (2 points)*

Réponse:

1. La formule stricte est $A = \Big(\neg x \Rightarrow \big((y \vee z) \Rightarrow (\neg(z \wedge y) \Rightarrow x)\big)\Big)$.
   qui peut ensuite facilement être écrite sous forme d'arbre.
2. La table de vérité est :

x	y	z	$\neg x$	$y \vee z$	$\neg(y \wedge z)$	A
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1

3. La FND est $x + \bar{y}.\bar{z} + y.z$
4. La FNC est $(x + y + \bar{z}).(x + \bar{y} + z)$
5. Des modèles et contre-modèles se lisent facilement dans la table de vérité et/ou sur les formes normales.

$\square$

Exercice 3 (Résolution (25 points))
Soient

$$F = \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$

et

$$G = q \vee r$$

Dans tout cet exercice, les seules équivalences remarquables autorisées sont la distributivité et les lois de De Morgan. En particulier, il est interdit d'utiliser les règles de simplification.

1. *Transformez F et G en produit de clauses.*
   Si nécessaire dans la suite de l'exercice, vous pourrez également calculer les clauses pour $\neg F$ et/ou $\neg G$.
2. *Parmi les propriétés suivantes, dites lesquelles sont vérifiées, et justifiez vos réponses en utilisant la résolution et les lois de De Morgan :*
   (a) $F \models G$
   (b) $G \models F$
   (c) $F \equiv G$
   (d) $\neg F \vee G$ *est une tautologie.*
   (e) $\neg F \vee G$ *est une contradiction.*

Réponse: Considérons les clauses correspondant aux formules F et G :

$$F_c = \{(p + q + r), (\overline{p} + q + r)\}$$

$$G_c = \{q + r\}$$

1. $F \models G$ si et seulement si $F \cup \neg G$ est insatisfaisable, ie permet de démontrer l'absurde par résolution.

$$F \cup \neg G = \{(p + q + r), (\overline{p} + q + r), \neg q, \neg r\}$$

1.	$p + q + r$	*Hypothse*
2.	$\overline{p} + q + r$	*Hypothse*
3.	$q + r$	*Resolvant de* 1.2.
4.	$\neg q$	*Hypothse*
5.	r	*Resolvant de* 3.4.
6.	$\neg r$	*Hypothse*
7.	$\perp$	*Resolvant de* 5.6.

2. Comme à la question précédente avec $G \cup \neg F$

$$G_c \cup \neg F_c = \{q + r, p + \overline{q}, p + \overline{r}, \overline{q} + \overline{p}, \overline{q}, \overline{q} + \overline{r}, \overline{p} + \overline{r}, \overline{q} + \overline{r}, \overline{r}\}$$

1.	$q + r$	*Hypothse*
2.	$\overline{r}$	*Hypothse*
3.	q	*Resolvant de* 1.2.
4.	$\overline{q}$	*Hypothse*
5.	$\perp$	*Resolvant de* 3.4.

3. $F \equiv G$ puisque $F \models G$ et $G \models F$.
4. $\neg F \vee G$ est une tautologie puisque $F \equiv G$ (loi du tiers exclus).
5. $\neg F \vee G$ n'est pas une contradiction puisque c'est une tautologie.

□

Exercice 4 (DPLL (20 points))
Déterminez **en appliquant l'algorithme DPLL** *si les ensembles de clauses suivants sont satisfaisables. Le cas échéant, vous donnerez le modèle exhibé par DPLL.*
Vous donnerez une trace complète du déroulement de l'algorithme étiquetée par les règles utilisées.

1. $\{a+b+\overline{c},\ \overline{a}+c+d,\ e+a+b,\ \overline{e}+c+e,\ b+\overline{c},\ \overline{b}+d,\ \overline{a}+\overline{c},\ c+\overline{d}\}$ *(10 points)*
2. $\{a+d,\ a+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d},\ a+b+c+\overline{d},\ \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+d,\ \overline{a}+c,\ \overline{b}+a+c,\ \overline{c}+b,\ \overline{d}+\overline{a}\}$ *(10 points)*

Réponse:

1. $\{a+b+\overline{c},\ \overline{a}+c+d,\ e+a+b,\ \overline{e}+c+e,\ b+\overline{c},\ \overline{b}+d,\ \overline{a}+\overline{c},\ c+\overline{d}\}$
   RED : $\{\overline{a}+c+d,\ e+a+b,\ b+\overline{c},\ \overline{b}+d,\ \overline{a}+\overline{c},\ c+\overline{d}\}$
   ELI $e=1$: $\{\overline{a}+c+d,\ b+\overline{c},\ \overline{b}+d,\ \overline{a}+\overline{c},\ c+\overline{d}\}$
   ELI $a=0$: $\{b+\overline{c},\ \overline{b}+d,\ c+\overline{d}\}$
   Branche $b=0$: $\{\overline{c},\ c+\overline{d}\}$
   ELI $d=0$: $\{\overline{c}\}$
   ELI $c=0$: $\{\}$
   On a un modèle $a=0, b=0, c=0, d=0, e=1$
2. $\{a+d,\ a+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d},\ a+b+c+\overline{d},\ \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+d,\ \overline{a}+c,\ \overline{b}+a+c,\ \overline{c}+b,\ \overline{d}+\overline{a}\}$
   $\{a+d,\ a+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d},\ a+b+c+\overline{d},\ \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+d,\ \overline{a}+c,\ \overline{b}+a+c,\ \overline{c}+b,\ \overline{d}+\overline{a}\}$
   — Branche $a=0$: $\{d,\ \overline{b}+\overline{c}+\overline{d},\ b+c+\overline{d},\ \overline{b}+c,\ \overline{c}+b\}$
     RU $d=1$: $\{\overline{b}+\overline{c},\ b+c,\ \overline{b}+c,\ \overline{c}+b\}$
     — Branche $b=0$: $\{c,\ \overline{c}\}$
       RU : $\perp$
     — Branche $b=1$: $\{\overline{c},\ c\}$
       RU : $\perp$
   — Branche $a=1$: $\{\overline{b}+\overline{c}+d,\ c,\ \overline{c}+b,\ \overline{d}\}$
     RU $c=1, d=0$: $\{\overline{b},\ b\}$
     RU : $\perp$
   L'ensemble de clauses est insatisfaisable.

□

Exercice 5 (Déduction naturelle (20 points))
Prouver, **par déduction naturelle**, *les formules suivantes.*

Chaque formule de la preuve devra être justifiée ; il vous est recommandé de présenter vos preuves sous forme de tableaux comme vu en cours.

1. $A\ =\ (p \vee q \Rightarrow s \wedge t) \Rightarrow (q \Rightarrow s)$ *(10 points)*
2. $B\ =\ (p \vee \neg q) \Rightarrow \big((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big)$ *(10 points)*

Réponse:

1. $A\ =\ (p \vee q \Rightarrow s \wedge t) \Rightarrow (q \Rightarrow s)$

```
1   assume p + q => s & t.
2     assume q.
3       p + q.                                      +I2 2
4       s & t.                                      =>E 1,3
5       s.                                          &E1 4
6     therefore q => s.                             =>I 2,5
7   therefore (p + q => s & t) => q => s.           =>I 1,6
```

2. $B\ =\ (p \vee \neg q) \Rightarrow \big((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big)$

```
1   assume p + -q.
2     assume p => -q.
3       assume q.
4         assume p.
5           -q.                                     =>E 2,4
6           F.                                      =>E 5,3
7           r.                                      Efq 6
8         therefore p => r.                         =>I 4,7
9         assume -q.
```

```
10          F.                                         =>E 9,3
11          r.                                         Efq 10
12        therefore -q => r.                           =>I 9,11
13        r.                                           +ES 1,8,12
14      therefore q => r.                              =>I 3,13
15    therefore (p => -q) => q => r.                   =>I 2,14
16  therefore p + -q => (p => -q) => q => r.           =>I 1,15
```

□

Exercice 6 (Démonstration par récurrence, exo du poly (15 points))

Démontrez que toute formule construite avec une seule variable p, uniquement les connecteurs binaires $\vee$ et $\wedge$ et sans négation est équivalente à une formule de taille 0.

Si vous trouvez des cas très semblables, vous pouvez raccourcir la démonstration en admettant une partie d'entre eux.

Réponse: Nous effectuons une preuve par récurrence sur la taille des formules. Considérons une formule F construite avec une seule variable p, uniquement $\vee$ et $\wedge$ et sans négation.

Cas de base : $|F| = 0$. La récurrence est trivialement vérifiée dans ce cas.

Induction : $|F| = n + 1$ et supposons que toutes les formules construite avec une seule variable p, uniquement $\vee$ et $\wedge$ et sans négation de taille inférieure ou égale à n sont équivalentes à une formule de taille 0. Nous avons deux cas duaux, où $|A| \leq n$ et $|B| \leq n$, donc par hypothèse de récurrence A et B sont donc équivalentes à une formule de taille 0, c'est-à-dire 0, 1, ou p :

- $F = (A \vee B)$. Nous avons donc 9 cas à examiner :
  - $A = 0$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = p$, donc $F = p$.
  - $A = 1$
    - $B = 0$, donc $F = 1$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = p$, donc $F = 1$.
  - $A = p$
    - $B = 0$, donc $F = p$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = p$, donc $F = p$.
- $F = (A \wedge B)$. Nous avons donc 9 cas à examiner :
  - $A = 0$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = 0$.
    - $B = p$, donc $F = 0$.
  - $A = 1$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = p$, donc $F = p$.
  - $A = p$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = p$.
    - $B = p$, donc $F = p$.

□