Partiel INF402 - Introduction à la logique

L2 INM - MIN - MAT

Benjamin Wack

11 mars 2024
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

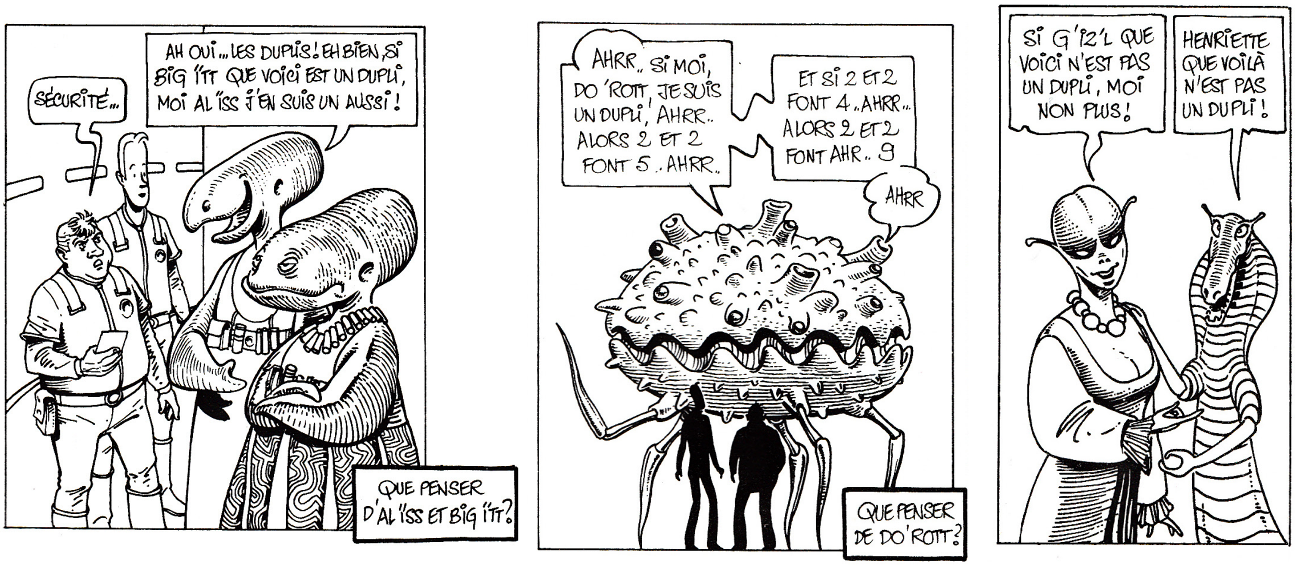
Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices. L'épreuve sera notée sur 120 points.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Formalisation (20 points)) [1]

Des « duplis » se sont infiltrés à bord d'une station spatiale. Ils ont la même apparence que les extra-terrestres, mais il y a un moyen pour les reconnaître : ils ne prononcent que des phrases fausses !

À l'inverse, tous les extra-terrestres ne prononcent que des phrases vraies.

Votre mission est d'enquêter sur les personnes que vous rencontrez. On s'intéresse à trois cas distincts (indépendants les uns des autres) :



1. *(8 points) Formalisez chacune de ces trois situations en logique propositionnelle, en choisissant des variables appropriées.*

   Attention, votre formalisation doit tenir compte du fait que les personnes qui parlent peuvent mentir ! Il ne suffit donc pas de traduire les phrases prononcées par les personnages.

2. *(9 points)*

   Transformez chacune des trois formules en forme normale disjonctive, en les simplifiant le plus possible.

3. *(3 points)*

   Concluez : parmi Al Ïss, Big Ïtt, Do'rott, G'iz'l et Henriette, qui sont les duplis ?

   Y a-t-il des personnages pour lesquels il est impossible de conclure ?

□

1. Ce problème est dû à Marie Berrondo, dessiné par Claude Lacroix et publié dans la revue *Jeux et stratégie* (numéro 6 de décembre 1980).

Exercice 2 (Priorités, table de vérité et modèles (20 points))

Soit $A = \neg x \wedge z \Leftrightarrow y \Rightarrow x \vee \neg y \wedge z$.

1. *(5 points) Réécrivez cette formule sous forme d'arbre.*
2. *(5 points) Construisez la table de vérité de* A.
   Répondez à l'aide de la table de vérité aux questions suivantes :
3. *(2 points) La formule* A *est-elle valide ?*
4. *(2 points) Déterminez un modèle de la formule* A.
5. *(2 points) Déterminez un contre-modèle de la formule* A.
6. *(4 points) Déterminez une forme normale disjonctive de* A.

□

Exercice 3 (Résolution (20 points))

Montrez **par résolution** *que les ensembles de formules suivants sont insatisfaisables :*

1. *(10 points)* $\{p+q, \bar{p}+s, \bar{q}+r, \bar{r}+p+t, \bar{t}, \bar{r}, \bar{q}+r+s, \bar{s}+t\}$
2. *(10 points)* $\{a+b+c, \bar{c}+\bar{d}, \bar{b}+d, \bar{a}+b, d+b, \bar{d}+\bar{b}\}$

□

Exercice 4 (DPLL (20 points))

Déterminez **en appliquant l'algorithme DPLL** *si les ensembles de clauses suivants sont satisfaisables. Le cas échéant, vous donnerez le modèle exhibé par DPLL.*

Vous donnerez une trace complète du déroulement de l'algorithme étiquetée par les règles utilisées.

1. *(10 points)* $\{a+\bar{c}+d, \bar{b}+c+f, b+\bar{e}+f, \bar{c}+e+\bar{f}, e+f, c+d, \bar{a}, \bar{e}+\bar{f}\}$
2. *(10 points)* $\{a+\bar{b}+\bar{d}, \bar{a}+c+\bar{d}, \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, \bar{a}+b+c, a+b+c+d, a+\bar{d}+c, a+\bar{c}+d, \bar{c}+b, c+d+\bar{b}\}$

□

Exercice 5 (Déduction naturelle, exos du poly (25 points))

Prouver, **par déduction naturelle**, *les formules suivantes.*

Chaque ligne de la preuve devra être justifiée ; vous présenterez vos preuves sous forme de tableaux comme vu en cours.

1. *(10 points)* $B = \neg(a \vee b) \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b)$
2. *(10 points)* $A = (p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow q \vee r$
3. *(5 points)* $C = (\neg b \Rightarrow \neg a) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$

□

Exercice 6 (Démonstration par récurrence (15 points))

Nous rappelons la table de vérité de l'opérateur Xor (ou exclusif), qu'on notera $\oplus$ *dans cet exercice.*

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Dans cet exercice, on notera la négation de A *indifféremment* $\neg A$ *ou* $\overline{A}$.

On s'intéresse à des formules construites avec les constantes, les variables et les connecteurs $\perp, \top, \oplus, \neg$. *L'objet de cet exercice est de démontrer qu'une seule négation suffit à écrire ces formules.*

Soient A *et* B *des formules :*
(à vous de choisir la technique de preuve la plus appropriée pour répondre aux deux premières questions)

1. *(5 points) Montrer que* $\overline{A} \oplus \overline{B} \equiv A \oplus B$.
2. *(10 points) Montrer que* $\overline{A} \oplus B \equiv \overline{A \oplus B}$.
3. *Soit* F *une formule écrite uniquement avec* $\perp, \top, \oplus, \neg$, *des variables et des parenthèses.*
   À l'aide d'une démonstration par récurrence, montrer comment on peut transformer toute formule F *de ce type en une formule équivalente* F' *qui est soit écrite sans négation, soit comporte une seule négation qui porte sur la formule toute entière.*
   Autrement dit :
   — F' *est écrite uniquement avec* $\perp, \top, \oplus$, *des variables et des parenthèses ;*
   — *ou bien* F' *est la négation d'une formule écrite uniquement avec* $\perp, \top, \oplus$, *des variables et des parenthèses.*
   Par exemple : la démonstration demandée permettrait de montrer que $\bar{x} \oplus \overline{y \oplus \bar{z}}$ *est équivalente à* $\overline{x \oplus (y \oplus z)}$.

□

Corrigés

Exercice 1, page 1

1. On définit les variables propositionnelles A, B, D, G, H pour « Al Ïss dit la vérité » (respectivement Big Ïtt, etc.).
   Remarquons que $\bar{X}$ signifie que X est un dupli.

   On sait que $2+2=5$ et $2+2=9$ sont faux, on les remplace par la constante $\perp$, et on remplace $2+2=4$ par $\top$.
   Les affirmations se traduisent par les formules :

$$\begin{array}{l} \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \\ (\bar{D} \Rightarrow \perp) \wedge (\top \Rightarrow \perp) \\ G \Rightarrow H \\ H \end{array}$$

   Il faut pondérer ces affirmations par le fait qu'elles ne sont vraies que la personne qui les prononce n'est pas un dupli :

$$\begin{array}{l} A \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) \\ D \Leftrightarrow ((\bar{D} \Rightarrow \perp) \wedge (\top \Rightarrow \perp)) \\ H \Leftrightarrow (G \Rightarrow H) \\ G \Leftrightarrow H \end{array}$$

   Barème : 2 points pour chaque formule. On donne la moitié des points si les phrases sont traduites correctement mais ne tiennent pas compte du locuteur.

2. Les formules donnent :

$$\begin{array}{l} A.(B + \bar{A}) + \bar{A}.\bar{B}.A \equiv A.B \\ D \Leftrightarrow ((\bar{D} \Rightarrow \perp) \wedge \perp) \equiv D \Leftrightarrow \perp \equiv \bar{D} \\ (H.(\bar{G} + H) + \bar{H}.G.\bar{H}).(G.H + \bar{G}.\bar{H}) \equiv (H + G).(G.H + \bar{G}.\bar{H}) \equiv G.H \end{array}$$

   Barème : 3 points pour chaque simplification, ou (ce qui revient à peu près au même) :
   — 3 points pour savoir traduire les $\Leftrightarrow$ en négation et disjonction
   — 3 points pour savoir traduire les $\Rightarrow$ et leurs négations
   — 3 points pour savoir distribuer et simplifier

3. Donc seul Do'rott est un dupli, les autres sont honnêtes.
   Barème : 1 point pour chaque situation où la conclusion est cohérente avec la formule obtenue à la question précédente.

On pourrait aussi faire la modélisation avec les variables opposées (X est vrai si X est un dupli).
On obtient les mêmes formules avec les variables complémentaires :

$$\begin{array}{l} \bar{A} \Leftrightarrow (B \Rightarrow A) \\ \bar{D} \Leftrightarrow ((D \Rightarrow \perp) \wedge (\top \Rightarrow \perp)) \\ \bar{H} \Leftrightarrow (\bar{G} \Rightarrow \bar{H}) \\ \bar{G} \Leftrightarrow \bar{H} \end{array}$$

et donc :

$$\begin{array}{l} \bar{A}.(\bar{B} + A) + A.B.\bar{A} \equiv \bar{A}.\bar{B} \\ \bar{D} \Leftrightarrow ((D \Rightarrow \perp) \wedge \perp) \equiv \bar{D} \Leftrightarrow \perp \equiv D \\ (\bar{H}.(G + \bar{H}) + H.\bar{G}.H).(\bar{G}.\bar{H} + G.H) \equiv (\bar{H} + \bar{G}).(\bar{G}.\bar{H} + G.H) \equiv \bar{G}.\bar{H} \end{array}$$

ce qui donne bien le même résultat au final.

Exercice 2, page 2

1. La formule stricte est $A = (\neg x \wedge z) \Leftrightarrow \Big(y \Rightarrow \big(x \vee (\neg y \wedge z)\big)\Big)$.
   qui peut ensuite facilement être écrite sous forme d'arbre.
   Barème : 5 points si l'arbre est correct, 2 s'il n'y a qu'une erreur de priorité, 0 sinon.

2. La table de vérité est :

x	y	z	$\neg x \wedge z$	$\neg y \wedge z$	$x \vee \neg y \wedge z$	$y \Rightarrow x \vee \neg y \wedge z$	A
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0

   Barème : 1 point par colonne correctement complétée. On enlève des points s'il manque des assignations.
3. Un modèle possible est $x = 0, y = 1, z = 0$, l'autre est $x = 0, y = 0, z = 1$.
4. Les 6 autres assignations sont des contre-modèles.
5. La FND est obtenue à partir des modèles : $\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$.
   Barème : Rien à signaler, les réponses doivent être cohérentes avec la table donnée.

Exercice 3, page 2

1	$p + q$	Hyp
2	$\bar{p} + s$	Hyp
3	$q + s$	Res 1, 2
4	$\bar{s} + t$	Hyp
5	$q + t$	Res 3, 4
6	$\bar{q} + r$	Hyp
7	$t + r$	Res 5, 6
8	$\bar{t}$	Hyp
9	r	Res 7,8
10	$\bar{r}$	Hyp
11	$\perp$	Res 9, 10

1	$a + b + c$	Hyp
2	$\bar{a} + b$	Hyp
3	$b + c$	Res 1, 2
4	$\bar{c} + \bar{d}$	Hyp
5	$b + \bar{d}$	Res 3, 4
6	$d + b$	Hyp
7	b	Res 5, 6
8	$\bar{d} + \bar{b}$	Hyp
9	$\bar{d}$	Res 7,8
10	$\bar{b} + d$	Hyp
11	d	Res 7,10
12	$\perp$	Res 9,11

Barème : Les résolvants doivent être justifiés par les numéros de leurs parents (sinon -5 points à l'exercice).

On donne des points pour un début de preuve non aboutie (en fonction du nombre de clauses pertinentes obtenues).

Si une clause est obtenue autrement que par résolution elle invalide la suite de la preuve.

Exercice 4, page 2

1. $\{a + \bar{c} + d, \bar{b} + c + f, b + \bar{e} + f, \bar{c} + e + \bar{f}, e + f, c + d, \bar{a}, \bar{e} + \bar{f}\}$
   ELI $d = 1$

$$\{\bar{b} + c + f, b + \bar{e} + f, \bar{c} + e + \bar{f}, e + f, \bar{a}, \bar{e} + \bar{f}\}$$

   ELI $a = 0$

$$\{\bar{b} + c + f, b + \bar{e} + f, \bar{c} + e + \bar{f}, e + f, \bar{e} + \bar{f}\}$$

Branch $f = 0$

$$\{\bar{b} + c, b + \bar{e}, e\}$$

ELI $c = 1$

$$\{b + \bar{e}, e\}$$

ELI $b = 1$

$$\{e\}$$

ELI $e = 1$

$$\emptyset$$

Satisfaisable, un modèle est $a = 0, b = 1, c = 1, d = 1, e = 1, f = 0$.

2. $\{a + \bar{b} + \bar{d}, \bar{a} + c + \bar{d}, \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \bar{a} + b + c, a + b + c + d, a + \bar{d} + c, a + \bar{c} + d, \bar{c} + b, c + d + \bar{b}\}$
   - Branch $a = 0$

     $$\{\bar{b} + \bar{d}, b + c + d, \bar{d} + c, \bar{c} + d, \bar{c} + b, c + d + \bar{b}\}$$

     - Branch $c = 0$

       $$\{\bar{b} + \bar{d}, b + d, \bar{d}, d + \bar{b}\}$$

       RE

       $$\{b + d, \bar{d}, d + \bar{b}\}$$

       RU $d = 0$

       $$\{b, \bar{b}\}$$

       RU

       $$\perp$$

     - Branch $c = 1$

       $$\{\bar{b} + \bar{d}, d, b\}$$

       RU $d = 1, b = 1$

       $$\perp$$

   - Branch $a = 1$

     $$\{c + \bar{d}, \bar{b} + \bar{c}, b + c, \bar{c} + b, c + d + \bar{b}\}$$

     - Branch $c = 0$

       $$\{\bar{d}, b, d + \bar{b}\}$$

       RU $d = 0, b = 1$

       $$\perp$$

     - Branch $c = 1$

       $$\{\bar{b}, b\}$$

       RU

       $$\perp$$

   Insatisfaisable

Barème :
— Les règles doivent être étiquetées (sinon -5 points à l'exercice)
— La conclusion doit être clairement donnée (sinon -2 à la question)
— Dans la première question il ne doit pas y avoir de branche inutile, on s'arrête au premier modèle trouvé (sinon -2)
— On ne pénalise pas les oublis de règles, à moins qu'ils ne rallongent significativement l'algo.

Exercice 5, page 2

1. $B = \neg(a \vee b) \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b)$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\neg(a \vee b)$	
1,2	2	Supposons a	
1,2	3	$a \vee b$	$\vee I1$ 2
1,2	4	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1,3
1	5	Donc $\neg a$	$\Rightarrow I$ 2,4
1,6	6	Supposons b	
1,6	7	$a \vee b$	$\vee I2$ 5
1,6	8	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1,6
1	9	Donc $\neg b$	$\Rightarrow I$ 7,8
1	10	$(\neg a \wedge \neg b)$	$\wedge I$ 5,9
	11	Donc $\neg(a \vee b) \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b)$	$\Rightarrow I$ 1,10

2. $A = (p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow q \vee r$

contexte	numéro	ligne	règle
1	1	Supposons $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$	
1	2	$p \vee q$	$\wedge E$ 1 1
1	3	$p \Rightarrow r$	$\wedge E$ 2 1
1,4	4	Supposons p	
1,4	5	r	$\Rightarrow E$ 3,4
1,4	6	$q \vee r$	$\vee I$ 2 5
1	7	Donc $p \Rightarrow q \vee r$	$\Rightarrow I$ 4,6
1,8	8	Supposons q	
1,8	9	$q \vee r$	$\vee I$ 1 8
1	10	Donc $q \Rightarrow q \vee r$	$\Rightarrow I$ 8,9
1	11	$q \vee r$	$\vee E$ 2,7,10
	12	Donc $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow q \vee r$	$\Rightarrow I$ 1,11

3. $C = (\neg b \Rightarrow \neg a) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\neg b \Rightarrow \neg a$	
1,2	2	Supposons a	
1,2,3	3	Supposons $\neg b$	
1,2,3	4	$\neg a$	$\Rightarrow E$ 1,3
1,2,3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2,4
1,2	6	Donc $\neg\neg b$	$\Rightarrow I$ 3,5
1,2	7	b	RAA 6
1	8	$a \Rightarrow b$	$\Rightarrow I$ 2,7
	9	$(\neg b \Rightarrow \neg a) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$	$\Rightarrow I$ 1,8

Barème :
— Chaque preuve complète rapporte les points indiqués dans l'énoncé (10/10/5).
— Sinon, chacune des règles $\Rightarrow E$, $\Rightarrow I$, $\wedge E$, $\wedge I$, $\vee E$, $\vee I$, RAA utilisée correctement et à bon escient dans au moins une des preuves rapporte 3 points, et on peut donner quelques points en plus si l'idée d'une preuve correcte est présente.

Exercice 6, page 2

1. Montrer que : $\overline{A} \oplus \overline{B} = A \oplus B$.

2. Montrer que : $\overline{A} \oplus B = \overline{A \oplus B}$.

A	B	$A \oplus B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \oplus \overline{B}$	$\overline{A} \oplus B$	$\overline{A \oplus B}$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1

Barème : Forfait de 5 points pour les 2 premières questions, quelle que soit la méthode utilisée.

3. On procède par récurrence sur la taille des formules (le nombre de connecteurs).
   Soit F une formule écrite avec $\{\bot, \top, \oplus, \neg\}$.
   - Cas de base : si F est une constante ou une variable, alors la propriété est immédiatement vérifiée ($F = F'$ sans négation).
   - Cas $F = \overline{G}$: alors par hypothèse de récurrence, $G \equiv G'$ ou bien $G \equiv \overline{G'}$ avec G' une formule sans négation. On a alors respectivement $F \equiv \overline{G'}$ ou bien $F \equiv \overline{\overline{G'}} \equiv G'$.
   - Cas $F = A \oplus B$: alors par hypothèse de récurrence, $A \equiv A'$ ou bien $A \equiv \overline{A'}$, et $B \equiv B'$ ou bien $B \equiv \overline{B'}$ avec A' et B' des formules sans négation.
     On a donc quatre cas à considérer (en utilisant les équivalences démontrées aux 2 premières questions) :
     - $F \equiv A' \oplus B'$
     - $F \equiv A' \oplus \overline{B'} \equiv \overline{A' \oplus B'}$
     - $F \equiv \overline{A'} \oplus B' \equiv \overline{A' \oplus B'}$
     - $F \equiv \overline{A'} \oplus \overline{B'} \equiv A' \oplus B'$

     ce qui montre bien que F s'écrit soit sans négation (premier et dernier cas), soit comme la négation d'une formule sans négation.

   Barème :
   - 2 points pour le cas de base
   - 2 points pour le cas de la négation
   - 4 points pour le cas du $\oplus$
   - 2 points pour la rédaction